PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.
Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

b) Dada la función $h(x)=e^{sen\, f(x)}$, calcula el valor de su derivada en x = 0, sabiendo que f(0) = 0 y que f'(0) = 1.

----

a)

Sabiendo que la derivada de una función f(x) en un punto x_o viene dada por la fórmula:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Aplicando la misma fórmula a una función compuesta, por ejemplo, $(f\circ g)(x_0)$:

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{x-x_0}$$

Multiplicando y dividiendo por $g(x)-g(x_0)$ la expresión anterior, queda:

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\underline{f'[g(x_0)]\cdot g'(x_0)=(f\circ g)'(x_0)}$$

En general: $\underline{\underline{(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)}}$ *o* $\underline{\underline{(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)}}$

b)

Teniendo en cuenta que si $\alpha(x) = e^{\beta(x)}$ es $\alpha'(x) = \beta'(x) \cdot e^{\beta(x)}$, sería:

$$h(x) = e^{sen\ f(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) \cdot \cos\ f(x) \cdot e^{sen\ f(x)}$$

Particularizando para x = 0 y teniendo en cuenta que f(0) = 0 y que f'(0) = 1, es:

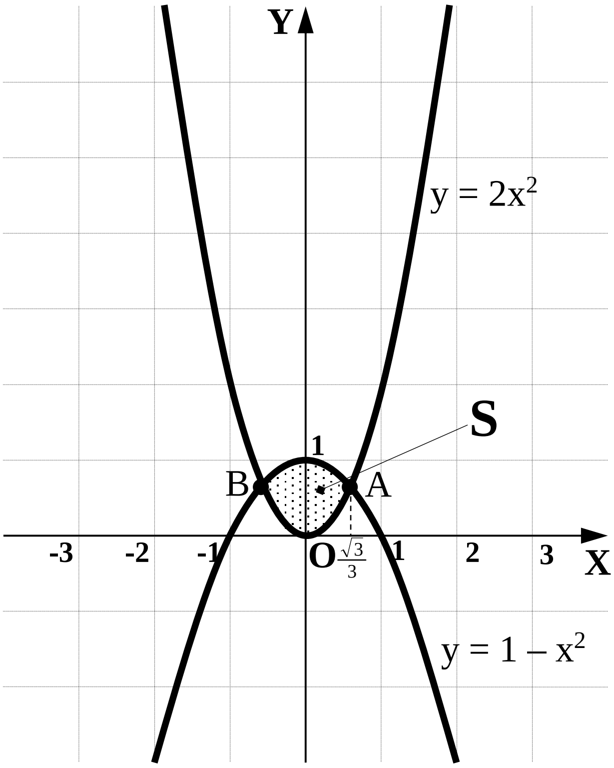
$$Para\ \ x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad h'(0) = f'(0) \cdot \cos\ f(0) \cdot e^{sen\ f(0)} = 1 \cdot \cos\ 0 \cdot e^{sen\ 0} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1 = h'(0)}}$$

****

2º) Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

Los puntos de corte de las dos parábolas, (que ambas son funciones pares, por lo que son simétricas con respecto al eje de ordenadas) se obtienen igualando ambas funciones y resolviendo la ecuación resultante:



$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - x^2 = 2x^2 \;;;\; 3x^2 = 1 \;;;$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{3}} \;;;\; \underline{x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$y_1 = 2x_1^{\,2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2}{3}\right)} \;;;\; \underline{B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2}{3}\right)}.$$

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones y que las ordenadas de la parábola $y = 1 - x^2$ tiene las ordenadas iguales o mayores que las correspondientes de la parábola $y = 2x^2$ en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, el valor del área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[\left(1 - x^2\right) - 2x^2\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1 - 3x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[x - \frac{3x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \cdot \left[x - x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 0\right] = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (3 - 1) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{9}\ u^2 = S}}$$

****

3º) a) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, según los valores de a.

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

----

a)

Teniendo en cuenta que $C_2 = 2C_1$ y que $C_3 = 3C_1$ y, por otra parte $F_3 = \frac{3}{2}F_2$, la matriz A (a efectos de su rango) es equivalente a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ cuyo rango en función de a es el siguiente:

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq 4 \ \Rightarrow\ Rang\ \ A = 2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 4 \ \Rightarrow\ Rang\ \ A = 1}}$$

b)

Para determinar el rango las propiedades de los determinantes que se han utilizado son las siguientes:

.- Si una matriz tiene dos líneas proporcionales su determinante es cero.

.- El determinante de una matriz no varía si se elimina una línea que sea linealmente dependiente de otra línea paralela.

****

4º) Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto P(0, a, b) esté en el plano determinado por los puntos A(1, 0, 0), B(1, 1, 1) y C(0, 2, 1).

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 2,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 1)$$

El plano π que contiene a los puntos A, B y C puede determinarse por uno cualquiera de los puntos, por ejemplo A, y los dos vectores obtenidos:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x-1-y+z-2(x-1)=0\ ;;\ x-1-y+z-2x+2=0\ ;;$$

$$-x-y+z+1=0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x+y-z-1=0}\ .$$

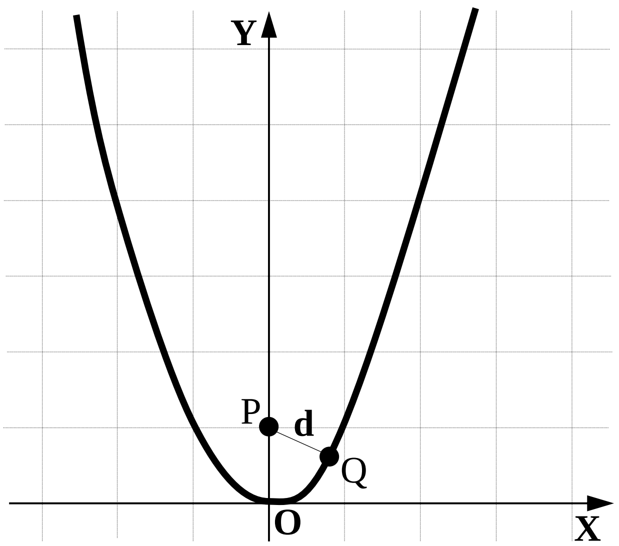
Para que el punto P(0, a, b) pertenezca al plano π, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y-z-1=0 \\ P(0,\ a,\ b) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0+a-b-1=0\ ;;\ \underline{\underline{a=b+1}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Determina los puntos de las parábola $y = x^2$ que estén a la mínima distancia del punto P(0, 1).



Los puntos de la parábola tiene la expresión $Q(x,\ x^2)$.

La distancia del punto P(0, 1) al punto genérico $Q(x,\ x^2)$ es la siguiente:

$$d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-1)^2}\ .$$

Operando y simplificando:

$$d_{\overline{PQ}} = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}\,.$$

La distancia será mínima cuando su derivada sea cero:

$$d'_{\overline{PQ}} = \frac{4x^3 + 6x}{2\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 3x}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2+3)}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

(Nótese que x = 0 es la única solución real por ser $2x^2 + 3 \neq 0,\ \forall x \in R$).

Para x = 0 resulta que el punto Q es el origen de coordenadas.

<u>El único punto cuya distancia es mínima al punto P(0, 1) es el origen de coordenadas.</u>

****

2º) Calcula el valor de la integral $I = \int_3^{10} (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$.

$$I = \int_3^{10} (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right\| \begin{array}{c} x=10 \rightarrow t=8 \\ x=3 \rightarrow t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_1^8 t^{\frac{1}{3}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_1^8 =$$

$$= \left[\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_1^8 = \left[\frac{3 \cdot \sqrt[4]{t^3}}{4} \right]_1^8 = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{8^3}}{4} - \frac{3 \cdot \sqrt[4]{1^3}}{4} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2^9}}{4} - \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} - 3}{4} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3 \cdot \left(4\sqrt[4]{2} - 1\right)}{4}}} = I \text{ .}$$

****

3º) a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$, según los valores del parámetro a.

----

a)

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

Matrices de coeficientes y ampliada: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Rango\ \ M\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1+a+a-1-a^2-1=-a^2+2a-1=-(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 1\ \Rightarrow\ Rango\ \ M\ =Rango\ \ M'=n^{o}\ \ incóg.\Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

Para a = 1 la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene de rango 1, lo cual significa que:

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1\Rightarrow Rango\ \ M\ =Rango\ \ M'=2<n^{o}\ \ incóg.\Rightarrow S.\ Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

****

4º) Escribe un vector de modulo 1 que sea ortogonal al vector $\vec{v}=(1,\ 2,\ 1)$.

Dos vectores son ortogonales o perpendiculares cuando el ángulo que forman es de cero grados.

Existen infinitos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y, el versor de cualquiera de ellos es solución a la cuestión. Versor de un vector es otro vector de las mismas características cuyo módulo es uno.

Sea $\overrightarrow{u_1}$ un vector cualquiera que vamos a suponer que es perpendicular al vector dado, para lo cual consideraremos un caso sencillo, como puede ser que tenga nula una de sus componentes; es decir: que tengamos solamente una incógnita; por ejemplo, sea $\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1,\ x)$.

Teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman y que el cos 90º = 0, sería:

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_1}=(1,\ 2,\ 1)\cdot(0,\ 1,\ x)=0\ \ ;;\ \ 0+2+x=0\ \ ;;\ \ \underline{x=-2}$$

El vector $\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1,\ -2)$ es ortogonal a $\vec{v}=(1,\ 2,\ 1)$.

Para obtener un versor de $\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1,\ -2)$, basta con dividir por su módulo:

$$Versor\ \ de\ \left|\overrightarrow{u_1}\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{Vector\ \ unitario\ \ ortogonal\ \ a\ \ \vec{v}\ \ \Rightarrow\ \ \vec{u}=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

(el vector opuesto al obtenido también es solución del ejercicio)

****