PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen. Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

REPERTORIO A

1º) a) Enuncia el Teorema de Rolle.

b) Prueba que la función $f(x)=x^3+x^2-x-1$ satisface su hipótesis en el intervalo $[-1,\ 1]$ y calcula un punto en el intervalo abierto $(-1,\ 1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.

----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f’(x) = 0.

b)

La función $f(x)=x^3+x^2-x-1$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto le es aplicable el Teorema de Rolle en cualquier intervalo real y, por lo tanto, en el intervalo (-1, 1).

Aplicando el Teorema:

$$f(x)=x^3+x^2-x-1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} f(1)=1+1-1-1=0 \\ \\ f(-1)=-1+1+1-1=0 \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; f(1)=f(-1)$$

En efecto, la función $f(x)=x^3+x^2-x-1$ satisface el Teorema de Rolle en $[-1,\ 1]$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = \frac{2}{3}} \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases}$$

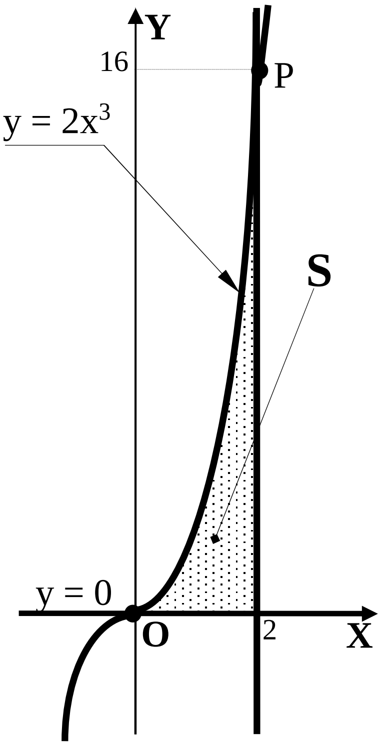
No es válido el valor x = -1 por no perteneces al intervalo $(-1,\ 1)$

$$\underline{\underline{\textit{El valor que satisface el Teorema de Rolle es para } x = \frac{2}{3}}}$$

****

2º) Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta x = 2. Calcula su área.

La recta tangente a la curva $y = 2x^3$ en el origen de coordenadas tiene como pendiente el valor de la derivada para x = 0:



$y' = 6x^2 \;\Rightarrow\; m = y'(0) = \underline{0 = m} \;\Rightarrow$ <u>La tangente en el origen es la recta y = 0 (Eje X).</u>

El problema consiste en hallar el área limitada por la función $y = 2x^3$, el Eje X y la recta x = 2.

El punto de corte de la función $y = 2x^3$ y la recta $x = 2$ es P(2, 16).

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura adjunta.

El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^2 2x^3 \cdot dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \left[x^3\right]_0^3 = 3^3 - 0 = \underline{\underline{27\ u^2 = S}}$$

****

3º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz 2A es $|2A| = 8$, ¿cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener dicho valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

El producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de sus elementos por el número.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante de la matriz queda multiplicado o dividido por dicho número.

Teniendo en cuenta que la matriz cuadrada A es de orden 3 y teniendo en cuenta lo anterior, resulta que: $|2A| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |A| = 8 \cdot |A|$.

Como es $|2A| = 8$, el valor del determinante de A es: $\underline{\underline{|A| = 1}}$.

b)

$$|2A| = 1 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 1 \;;;$$

$$2x + 2x + (x+1)(2-x) - 2x - 2x(2-x) - (x+1) = 0 \;;;$$

$$2x + 2x - x^2 + 2 - x - 4x + 2x^2 - x - 1 = 0 \;;\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;;\; (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

****

4º) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv x+y+z=1$.

Los puntos de corte del plano π con los respectivos ejes de coordenadas se obtienen igualando a cero las dos variables diferentes de cada eje:

Punto de corte con X $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 0,\ 0)}$.

Punto de corte con Y $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \underline{B(0,\ 1,\ 0)}$.

Punto de corte con Z $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ 1)}$.

Los vértices del triángulo son A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 1).

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 0,\ 1)$$

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |i+k+j| = \frac{1}{2} \cdot |i+j+k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2 = S}}$$

****

REPERTORIO B

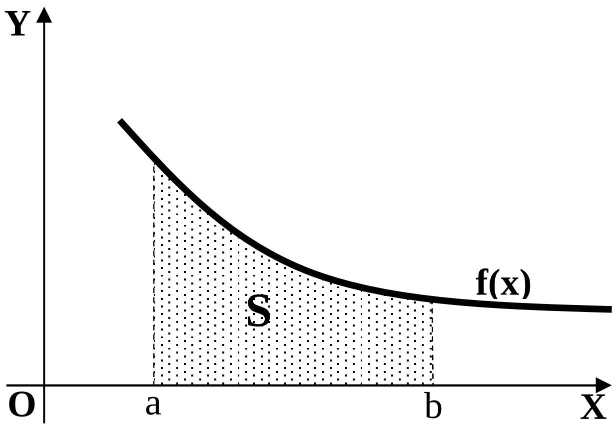
1º) a) Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

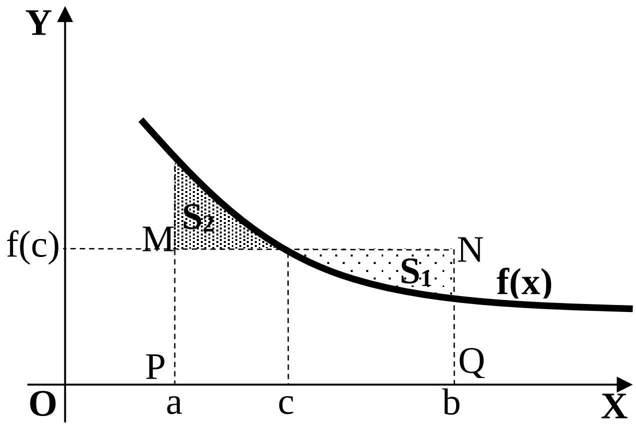
b) Calcula el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x)=3x^2+1$ en el intervalo $[0,\ 3]$.

----

a)

El Teorema del Valor Medio del cálculo integral se puede enunciar así: "Si una función f(x) es continua en un intervalo [a, b], existe un valor $c \in [a,\ b]$ tal que $\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c)\cdot(b-a)$".





La interpretación geométrica puede observarse en las figuras anteriores. El área S de la primera figura es equivalente al área del rectángulo de vértices PMNQ, cuya base es (b – a) y su altura es f(c).

El valor de a < c < b es tal que hace que las superficies S_1 y S_2 son iguales, lo cual justifica que S = (b – a) · f(c).

b)

Calcula el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x)=3x^2+1$ en el intervalo $[0,\ 3]$.

$$S=\int_0^3 \left(3x^2+1\right)\cdot dx=\left[\frac{3x^3}{3}+x\right]_0^3=\left[x^3+x\right]_0^3=\left(3^3-3\right)-0=27-3=\underline{24\ u^2=S}\ .$$

$$S=\int_a^b f(x)\cdot dx\ \Rightarrow\ S=f(c)\cdot(3-0)=24\ ;;\ \ f(c)=\frac{24}{3}=8\ ;;\ 3c^2+1=8\ ;;\ \underline{\underline{c=\sqrt{\frac{7}{3}}}}\ .$$

****

2º) Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$:

a) Comprueba que la recta y = 0 es asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

----

a)

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando la variable x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{Aplicando\ \ L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{Aplicando\ \ de\ \ nuevo\ \ L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

<u>Asíntota horizontal : y = 0 (Eje X), c.q.c.</u>

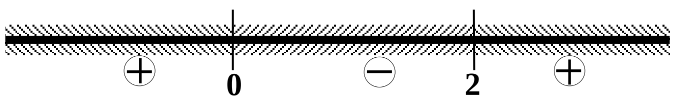
b)

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primara derivada:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x (2-x)}{e^{2x}} = \underline{\frac{x(2-x)}{e^x} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = 2} \end{cases}$$

El signo de f'(x) depende del numerador, ya que $e^x > 0,\ \forall x \in R$.



$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0, 2)}}$$

c)

Para realizar una representación aproximada de la función determinamos sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^x - x(2-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^2}{e^x}=\underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0 \Rightarrow \textit{Mínimo} \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mín}(0,\ 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0 \Rightarrow f(2)=\frac{2^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}\cong 0'54 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máx}(2,\ 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x)=0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x)\neq 0$.

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=2+\sqrt{2}}\\ \underline{x_2=2-\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{(2x-4)\cdot e^x-\left(x^2-4x+2\right)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x}=\underline{\frac{-x^2+6x-6}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f'''\left(2+\sqrt{2}\right)\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(3'41,\ 0'38)}}$$

$$f'''\left(2+\sqrt{2}\right)\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(3'41,\ 0'38)}}$$

$$f'''\left(2-\sqrt{2}\right)\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{2-\sqrt{2}}}\cong 0'24 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(0'59,\ 0'24)}}$$

Las posibles asíntotas verticales y oblicuas son las siguientes:

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

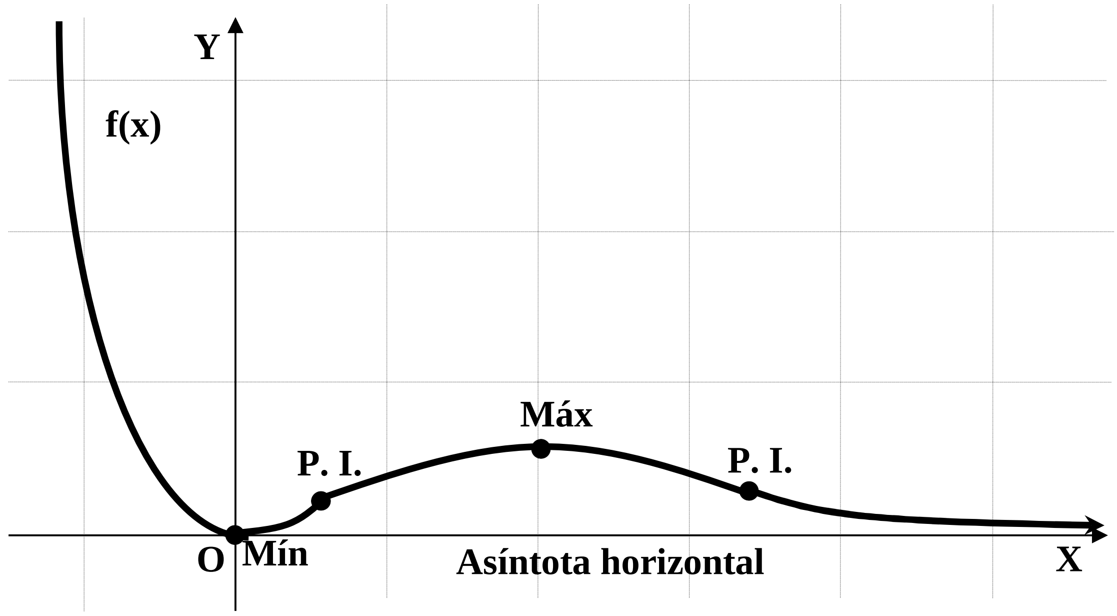
$$\underline{\underline{e^x\neq 0,\ \forall x\in R \ \Rightarrow\ No\ \ tiene}}.$$

Asíntotas oblicuas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=\underline{0=m}$$

<u>No tiene asíntotas verticales.</u>

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

3º) Calcula la matriz X tal que $A^2 \cdot X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} los términos de la expresión $A^2 \cdot X = A$:

$$A^{-1} \cdot A^2 \cdot X = A^{-1} \cdot A \;\;;;\;\; A \cdot X = I.$$

Multiplicando por la izquierda de nuevo por A^{-1} la expresión anterior:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I \;\;;;\;\; I \cdot X = A^{-1} \;\;;;\;\; \underline{X = A^{-1}}.$$

Vamos a determinar la inversa de A por el Método de Gaus-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) a) Determina la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta de ecuaciones $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

b) Calcula la distancia entre la recta r y el plano π anteriores.

----

a)

El vector normal del plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$ y el vector director de la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ -1)$.

El producto escalar de los vectores anteriores es:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1) \cdot (2,\ 1,\ -1) = 2 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{n}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}\ \ son\ \ perpendiculares}$$

$$\underline{\underline{El\ \ plano\ \ \pi\ \ y\ \ la\ \ recta\ \ r\ \ son\ \ paralelos.}}$$

b)

La distancia de una recta a un plano al que es paralela es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Un punto de la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ es P(0, -1, -2).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al punto $P(0,\ -1,\ -2)$ y al plano $\pi \equiv x - y + z - 2 = 0$, es:

$$d(\pi,\ r) = d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$d(\pi,\ r) = \underline{\underline{\sqrt{3}\ unidades = d(P,\ \pi)}}$$

****