PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x} = \frac{1+0-e^0}{sen^2\, 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{0+1-e^x}{2 \cdot sen\, x \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{sen\,(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{sen\,(2x)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{0-e^x}{2 \cdot \cos(2x)} = \frac{-e^0}{2 \cdot \cos 0} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

****

2º) Representar gráficamente la figura plana limitado por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto P(1, 1) y el eje OY. Calcular su área.

La curva es una función de tipo polinómico, continua y derivable en su dominio de definición, que es R. Pasa por el origen de coordenadas.

Es una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas. El recorrido de la curva es $[0, +\infty)$, por lo cual tiene todas sus ordenadas positivas.

Para determinar los posibles máximos y mínimos de la curva tenemos que tener en cuenta el siguiente teorema:

"Si f(x) es una función con derivada de orden n continua en un valor x_0 y tal que cumple que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots\cdots f^{n-1}(x_0) = 0 \ \ y \ \ f^n(x_0) \neq 0$, entonces:

1.- Si n es impar, la función f(x) es monótona en x_0, siendo estrictamente creciente cuando $f^n(x_0) > 0$ y estrictamente decreciente cuando $f^n(x_0) < 0$.

2- Si n es par, la función f(x) tiene un máximo relativo en x_0 cuando $f^n(x_0) < 0$ y un mínimo relativo cuando $f^n(x_0) > 0$".

En el caso que nos ocupa ocurre lo siguiente:

$$y' = f'(x) = 4x^3 \ ;; \ f''(x) = 12x^2 \ ;; \ f'''(x) = 24x \ ;; \ f^{IV}(x) = 24 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'''(0) = 0 \\ \\ f^{IV}(0) \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{n = 4}$$

Por ser n par $f^{IV}(0) = 24 > 0$, <u>la curva tiene un mínimo relativo en el origen de coordenadas.</u>

La ecuación de su recta tangente en el punto P(1, 1) es la siguiente:

$$y' = 4x^3 \Rightarrow m = y'(1) = 4 \cdot 1^3 = \underline{4 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 4(x - 1) = 4x - 4 \Rightarrow \text{Recta tangente: } \underline{y = 4x - 3}$$

Para el estudio de la concavidad y convexidad de la función es necesario utilizar el siguiente teorema:

"Si f(x) es una función con derivada de orden n continua en un valor x_0 y tal que cumple que $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots\cdots f^{n-1}(x_0) = 0 \ \ y \ \ f^n(x_0) \neq 0$, entonces:

1.- Si n es par y $f^{n}(x_0) > 0$, f(x) es convexa $(\cup)$ en x_0.

2- Si n es par y $f^{n}(x_0) < 0$, f(x) es cóncava $(\cap)$ en x_0.

3.- Si n es impar, f(x) tiene un punto de inflexión en x_0”.

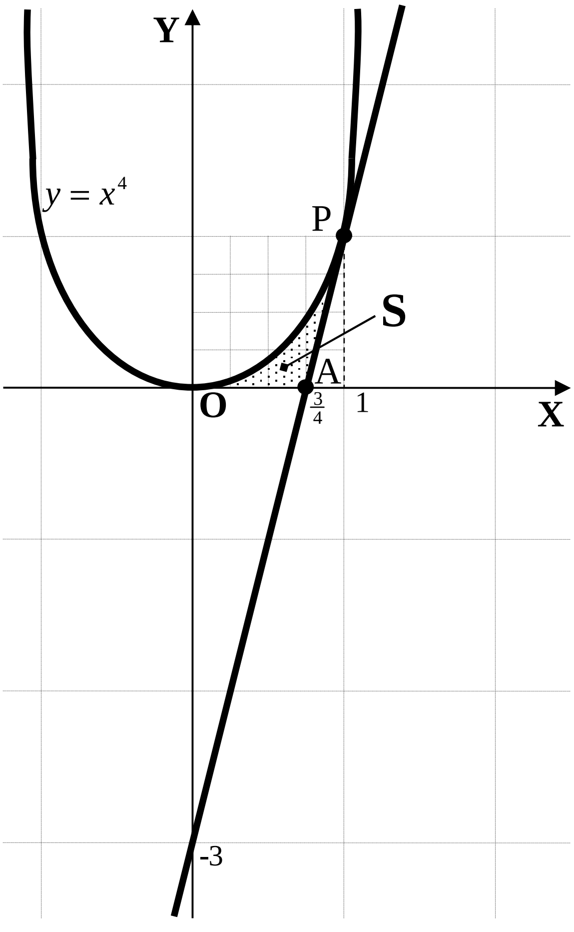
En nuestro caso, $f^{IV}(0) = 24 > 0 \Rightarrow n \rightarrow par \Rightarrow$ <u>La función es convexa en el origen de coordenadas.</u>

De lo anterior se deduce que la curva y la recta tangente, de pendiente positiva, no se cortan en otro punto distinto que el punto de tangencia P(1, 1).

El punto de corte con el eje de abscisas de la recta tangente es el siguiente:

$$y = 4x - 3 = 0 \;\; ;; \;\; 4x = 3 \;\; ;; \;\; x = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{3}{4},\; 0\right)}.$$

La representación gráfica aproximada de la situación es la de la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce que todas las ordenadas correspondientes a la curva son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta tangente.

El valor del área pedida es:

$$S = \int_0^1 x^4 \cdot dx - \int_{\frac{3}{4}}^{1} (4x-3) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 x^4 \cdot dx + \int_1^{\frac{3}{4}} (4x-3) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{4x^2}{2} - 3x\right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{5} + \left[2x^2 - 3x\right]_1^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{5} + \left[2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4}\right] - (2-3) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{8+45-90+40}{40} = \frac{93-90}{40} = \underline{\underline{\frac{3}{40}\; u^2 = S}}$$

****

3º) Determina la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas A(1, 0, 0), B(a, b, 0), C(a, 0, b) y D(0, a, b) estén en un plano.

Los puntos A(1, 0, 0), B(a, b, 0), C(a, 0, b) y D(0, a, b) son coplanarios cuando los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes, o sea, que el rango de la matriz que forman sea dos.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (a,\ b,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (a-1,\ b,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (a,\ 0,\ b) - (1,\ 0,\ 0) = (a-1,\ 0,\ b)$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0,\ a,\ b) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ a,\ b)$$

Para que los puntos estén en un mismo plano tiene que cumplirse lo siguiente:

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} = 2\ \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -b^2 - ab(a-1) - b^2(a-1) = 0\ ;;$$

$$-b^2 - a^2b + ab - ab^2 + b^2 = 0\ ;;\ -a^2b + ab - ab^2 = 0\ ;;\ ab(-a+1-b) = 0\ \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Los\ \ puntos\ \ A, B, C\ \ y\ \ D\ \ son\ \ coplanarios\ \ en\ \ los\ \ siguientes\ \ casos\ \begin{cases} 1^{o}.- & a = 0 \\ 2^{o}.- & b = 0 \\ 3^{o}.- & a + b = 1 \end{cases}}}$$

****

4º) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.

$$A^2 = A + I \quad ;; \quad A^2 - A = I \quad ;; \quad A \cdot (A - I) = I.$$

Teniendo en cuenta que, por definición de inversa de una matriz, se cumple que:

$A \cdot A^{-1} = I$, de la última expresión se deduce que $\underline{\underline{A^{-1} = A - I}}$, que existe para cualquier matriz A de coeficientes reales.

Nota: Falsa sería la demostración siguiente:

$A^2 = A + I \quad ;; \quad A \cdot A = A + I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot (A + I) \quad ;; \quad I \cdot A = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot I \quad ;; \quad A = I + A^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = A - I}$$

Aunque se llega a una solución idéntica, se supone de antemano la existencia de la matriz inversa.

****

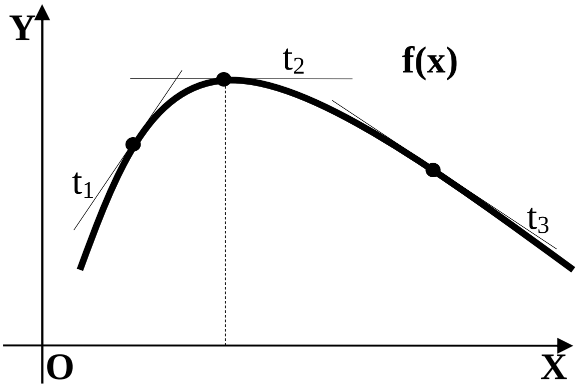
REPERTORIO B

1º) Define el concepto de máximo relativo de una función f(x) y enuncia su relación con las derivadas sucesivas de f(x).

Una función f(x), continua y derivable en el entorno de un punto de abscisa x = a, tiene un máximo relativo para x = a, si existe un entorno del punto de abscisa a, tal que $f(x) \leq f(a), \ \forall a \in R$.

De lo anterior se deduce que, para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que la derivada sea cero.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos observamos las pendientes de la función en los entornos del máximo y del mínimo:



En la figura se observa que las tangentes van disminuyendo, $t_1 > t_2 > t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de un máximo las derivadas constituyen una función creciente, por lo cual su derivada, o sea: la derivada de la derivada, (f'') es positiva.

En resumen: $\underline{\underline{Máximo \ \ relativo \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}}}$

Los resultados anteriores no permiten averiguar si una función tiene un máximo relativo para un valor x = a en el caso de que se anulen varias de las primeras derivadas de la función para ese valor; o sea:

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ \cdots\cdots = f^{n-1}(a) = 0, \ \ f^n(a) \neq 0$$

Por ejemplo, en la función $f(x) = 3 - 2x^4$, para x = 0, se cumple que:

$$f'(x) = -8x^3 \ \ ;; \ \ f''(x) = -24x^2 \ \ ;; \ \ f'''(x) = -48x \ \ ;; \ \ f^{IV}(x) = -48.$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) \ \ ;; \ \ f^{IV}(0) = -48 \neq 0$$

En estos casos puede utilizarse el siguiente teorema:

"Si f(x) es una función con derivada de orden n continua en un valor x_0 y tal que cumple que $f'(x_0) = f''(x_0) = \ \cdots\cdots \ f^{n-1}(x_0) = 0 \ \ y \ \ f^n(x_0) \neq 0$, entonces:

1.- Si n es impar, la función f(x) es monótona en x_0, siendo estrictamente creciente cuando $f^n(x_0) > 0$ y estrictamente decreciente cuando $f^n(x_0) < 0$.

2- Si n es par, la función f(x) tiene un máximo relativo en x_0 cuando $f^n(x_0) < 0$ y un mínimo relativo cuando $f^n(x_0) > 0$".

En el caso del ejemplo de la función y punto considerados, es n par y el valor de $f^{IV}(0) = -48 < 0$, con lo que la función $f(x) = 3 - 2x^4$ presenta un máximo relativo para x = 0.

****

2º) Halla una primitiva de la función $f(x) = x \cdot e^x$.

Para hallar una función primitiva F(x) de la función $f(x) = x \cdot e^x$ haya que recurrir al método de "por partes", cuya fórmula es $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$F(x) = \int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ \\ e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$$= x e^x - e^x + K = \underline{e^x (x-1) + k = F(x)}$$

Una función primitiva puede ser, por ejemplo:

$$\underline{\underline{F(x) = e^x (x-1) + 1}}$$

****

3º) Determina el plano π que pasa por el punto A(1, 2, 3) y por la recta r de ecuaciones $x+y=1,\ y+z=1$.

Con objeto de determinar un vector director y un punto de la recta r, la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{y=1-\lambda} \ ;;\ x=1-y=1-1+\lambda=\underline{\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r pueden ser P(0, 1, 0) y $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$.

El vector $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PA}=A-P=(1,\ 2,\ 3)-(0,\ 1,\ 0)=(1,\ 1,\ 3)$ es director del plano π pedido, al igual que también lo es el vector director de r, $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-3(x-1)+(y-2)+(z-3)+(z-3)-(x-1)-3(y-2)=0 \ ;;$$

$$-4(x-1)-2(y-2)+2(z-3)=0 \ ;;\ 2(x-1)+(y-2)-(z-3)=0 \ ;;$$

$$2x-2+y-2-z+3=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x+y-z-1=0}}$$

****

4º) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{cases}$ según los valores del parámetro b.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro b es:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=(1+b)^2-b-2b+(1+b)+b^2-2(1+b)=(1+b)^2+b^2-3b-(1+b)=$$

$$=1+2b+b^2+b^2-3b-1-b=2b^2-2b=2b(b-1)=0 \Rightarrow \underline{b_1=0} \;;;\; \underline{b_2=1}$$

$$Para \begin{Bmatrix} b\neq 0 \\ b\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ b=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_2+C_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$Para\ b=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$Para \begin{Bmatrix} b=0 \\ b=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado$$

****