PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x-z=1 \end{cases}$.

Las matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que como se aprecia tiene las columnas primera y tercera opuestas, por lo cual su rango es dos.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; su rango también es dos por ser iguales las columnas primera y cuarta y opuestas a la tercera.

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius es sistema es compatible indeterminado por tener las matrices de coeficientes y ampliada el mismo rango, dos, que es menor que el número de incógnitas, tres.

Para resolverlo despreciamos una de las ecuaciones (primera) y parametrizamos una de las incógnitas (z):

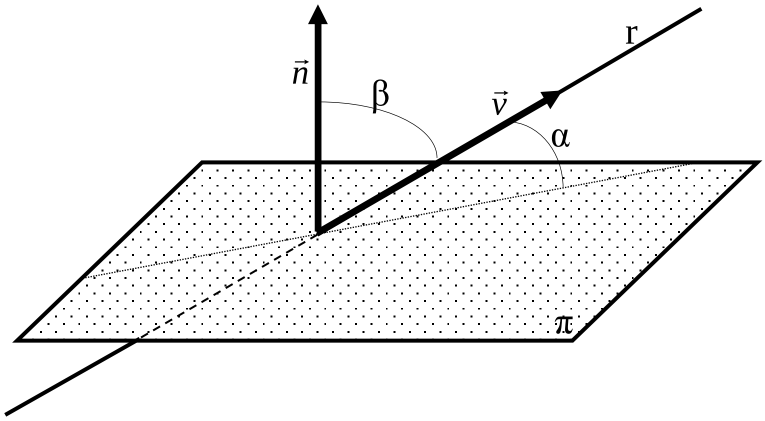
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1+\lambda \\ \underline{x=1+\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=0} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R$$

****

2º) Calcula el ángulo que forma el plano $\pi \equiv x+y+z=0$ con la recta r de ecuaciones $x+y=1,\ \ y+z=1$.

Para determinar el ángulo α que forma la recta r con el plano π (ver figura), consideramos el vector $\overrightarrow{v}$, director de la recta r, y el vector $\overrightarrow{n}$, normal del plano π.

Como puede observarse, el ángulo que forman los dos vectores es β, que es complementario del ángulo α que buscamos.



El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

Teniendo en cuenta que el coseno de un ángulo es igual que el seno de su ángulo complementario (de hecho, la palabra co-seno indica complementario del seno), sería:

$$sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = arc\ \ sen\ \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}}}$$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda}\ ;;\ \underline{y=1-\lambda}\ ;;\ x=1-y=1-1+\lambda=\underline{\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$.

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 1)$.

Aplicando la fórmula obtenida:

$$\alpha = arc\ \ sen\ \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = arc\ \ sen\ \frac{(1,\ -1,\ 1) \cdot (1,\ 1,\ 1)}{\sqrt{1^1 + (-1)^2 + 1^1} \cdot \sqrt{1^1 + 1^2 + 1^1}} = arc\ sen\ \frac{1-1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= arc\ sen\ \frac{1}{3} = arc\ sen\ 0'3333 = \underline{\underline{19^\circ\ \ 28'\ 16'' = \alpha}}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{sen\ x + sen(x+1)}{\cos\ x - \cos(x+1)}$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función f(x)?

$$f'(x) = \frac{[\cos\ x + \cos(x+1)] \cdot [\cos\ x - \cos(x+1)] - [sen\ x + sen(x+1)] \cdot [-sen\ x + sen(x+1)]}{[\cos\ x - \cos(x+1)]^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2(x+1) + sen^2 x - sen^2(x+1)}{[\cos\ x - \cos(x+1)]^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x - [\cos^2(x+1) + sen^2(x+1)]}{[\cos\ x - \cos(x+1)]^2} =$$

$$= \frac{1-1}{[\cos\ x - \cos(x+1)]^2} = \underline{\underline{0 = f'(x)}}$$

Por ser la derivada nula, la función f(x) es una constante.

****

4º) Enuncia la Regla de Barrow. Representa la gráfica de la función $f(x)=\int_1^x t\ dt$.

El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b)-F(a)$$

La función f(x) que se pide representar es la siguiente:

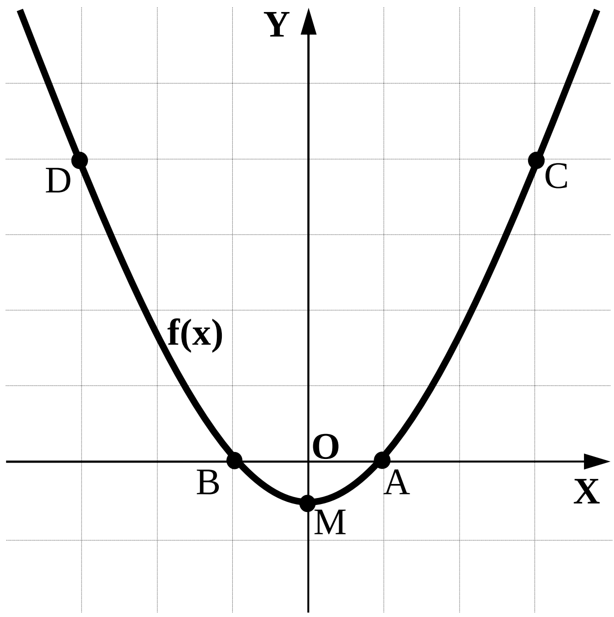
$$f'(x)=\int_1^x t\ dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\underline{\frac{1}{2}(x^2-1)=f(x)}$$

Se trata de una función par (simétrica con respecto al eje de ordenadas), que representa una parábola convexa $(\cup)$ cuyo mínimo M es el punto siguiente:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x=x\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ \underline{x=0}\ ;;\ f(0)=\frac{1}{2}(1^2-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo:\ M\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)}.$$

Unos puntos fáciles de obtener son, por ejemplo, para x = ± 1, ± 3, $\cdots$, obteniéndose los puntos A(1, 0), B(-1, 0), C(3, 4), D(-3, 4), $\cdots$

La representación gráfica aproximada es la que se indica en la figura adjunta.



****

REPERTORIO B

1º) Determina un plano π que pase por los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 1, 0), y sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \end{cases}$.

Por contener el plano π a los puntos A y B tiene como vector director al que determinan los puntos: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 1,\ 0) = \overrightarrow{u}}$..

Para hallar el vector director de la recta r la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2-\lambda \\ x-y=2-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 4-2\lambda \;\;;;\;\; \underline{x = 2-\lambda}$$

$$x+y=2-\lambda \;\;;;\;\; y = 2-\lambda-x = 2-\lambda-2+\lambda = \underline{0 = y} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1)}$$

Por ser el plano π paralelo a la recta r, el vector director de la recta también lo es del plano, por lo cual, la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; x-1+z+y=0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{\pi \equiv x+y+z-1=0}}$$

****

2º) Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con tres filas y cuatro columnas, que no tenga ningún elemento nulo.

Basta con que, por ejemplo, las dos primeras filas sean linealmente independientes y la tercera sea combinación lineal de las dos primeras y que todos los elementos sean distintos de cero.

Por ejemplo: $$\underline{\underline{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}}} \Rightarrow \{F_3 = F_1 + F_2\}.$$

También se podía haber resuelto, por ejemplo, siendo las dos primeras columnas linealmente independientes y las otras dos linealmente dependientes de las dos primeras, y que ninguno de los elementos sea nulo.

Por ejemplo: $$\underline{\underline{M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}}} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_3 = C_1 + C_2 \\ C_3 = C_2 - C_1 \end{matrix} \right\}.$$

****

3º) Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-1} \cdot x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función f(x).

Asíntotas horizontales: son los valores finitos de la función cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}} \ \ (Eje \ \ de \ \ abscisas)$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función valga más o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 1 \neq 0, \ \forall x \in R \ \Rightarrow \ \underline{\underline{No \ \ tiene \ \ asíntotas \ \ verticales.}}$$

Asíntotas oblicuas: No tiene. (para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que sea racional y el grado del denominador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Una función es creciente en un intervalo cuando todos los valores de la derivada son positivos en ese intervalo y, es creciente en un intervalo cuando todos los valores de la derivada son negativos en ese intervalo.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \underline{\frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es positivo para cualquier valor real de x, el valor de la derivada es positivo o negativo cuando lo sea el numerador:

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ 1 - x^2 > 0 \ ;; \ x^2 < 1 \ ;; \ |x| < 1 \ \Rightarrow \underline{\underline{Creciente : (-1, \ 1)}}$$

$$f'(x) < 0 \ \Rightarrow \ 1 - x^2 < 0 \ ;; \ x^2 > 1 \ ;; \ |x| > 1 \ \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente : (-\infty, \ -1) \cup (1, \ +\infty)}}$$

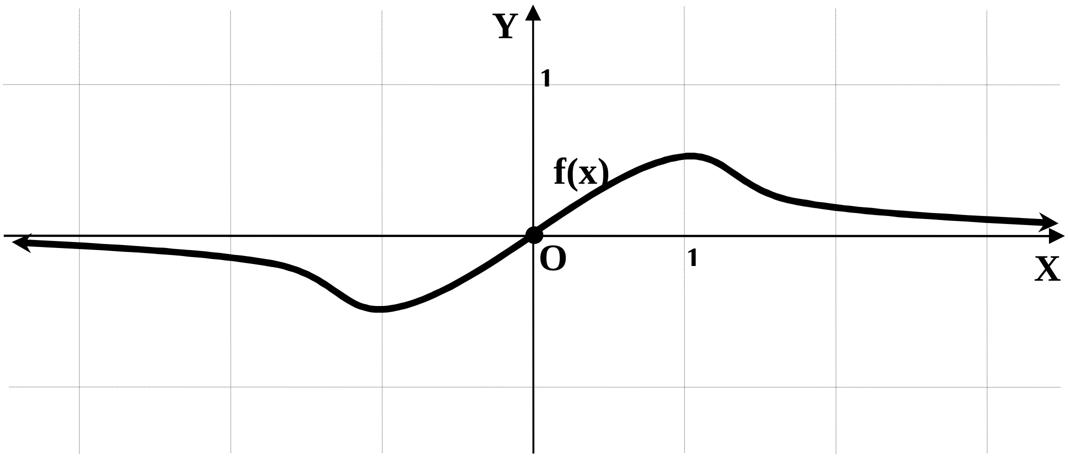
Para la representación gráfica tenemos en cuenta, además de los datos obtenidos con anterioridad, lo siguiente:

1.- Que el dominio de la función es R por ser una función racional y no existir ningún valor real que anule el denominador.

2.- Que se trata de una función simétrica con respecto al origen de coordenadas, por cumplirse que $f(x) = -f(-x)$.

3.- Que pasa por el origen de coordenadas por ser f(0) = 0.

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



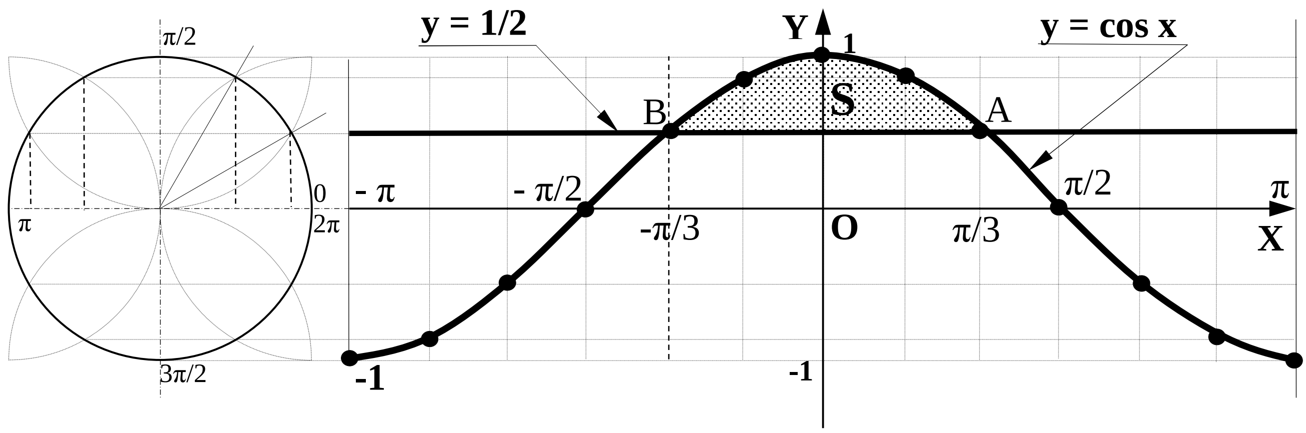
****

4º) Representa la figura plana limitada por la gráfica de la función f(x) = cos x, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y por la recta $y = \frac{1}{2}$. Calcula su área.

Se trata de una función continua cuyo dominio es R y recorrido [-1, 1]; el periodo es (2π).

La representación gráfica bastante aproximada de la función y = cos x es la indicada en la figura adjunta.

Los puntos de corte A y B de las dos funciones son para los ángulos de 60º y -60º, que corresponden en radianes a $\frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$, respectivamente.



Como puede observarse, en el intervalo comprendido por las dos funciones, todas las ordenadas de la curva y = cos x son mayores que las de la recta y = ½. Teniendo en cuenta lo anterior y que la curva del coseno es simétrica con respecto al eje de ordenadas, el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \cdot dx = 2 \cdot \left[sen\ x - \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \cdot \left(sen\ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}\ u^2 \cong 0'68\ u^2 = S$$

****