PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Enunciar el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales x < y se verifica que $\cos\ y - \cos\ x \leq y - x$.

El Teorema del Valor Medio, de los incrementos finitos o de Lagrange se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando la función $f(x) = \cos\ x$, que es continua y derivable en su dominio, que es R, también lo será en cualquier intervalo real considerado.

Teniendo en cuenta que $f'(x) = -sen\ x$ y que $|sen\ x| \leq 1,\ \forall x \in R$, implica que:

$$f'(c) = \frac{\cos\ y - \cos\ x}{y - x} \leq 1 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\cos\ y - \cos\ x \leq y - x,\ \ \forall \{x,\ \ y\} \in R,\ \ \ c.q.d.}}$$

****

2º) Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} y-x=z \\ x-z=y \\ y+z=x \end{array}\right\}.$

El sistema homogéneo dado es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$

Como puede apreciarse, las dos últimas ecuaciones son iguales, por lo cual se puede despreciar una de ellas, resultando finalmente el sistema lineal homogeneo de dos ecuaciones con tres incógnitas siguiente: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, lo cual significa, según el Teorema de Rouché, que el sistema tiene infinitas soluciones, además de la solución trivial x = 0, y = 0 y z = 0.

Para determinar las soluciones tendremos en cuenta que del sistema se deduce que z = 0, con lo cual resulta que x – y = 0; x = y. Haciendo $x=y=\lambda$:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \quad \forall \lambda \in R \\ z=0 \end{cases}}}$$

****

3º) Sean los puntos de coordenadas A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 1).

a) Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.

b) Determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

----

a)

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 1,\ 0)}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 0,\ 1)}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |\, i + k + j \,| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}\ u^2 = S_{ABC}}}$$

b)

Teniendo en cuenta el producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{(-1,\ 1,\ 0) \cdot (-1,\ 0,\ 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 0'5 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\alpha = 60^{o}}}$$

****

4º) Calcular una primitiva de la función $f(x)=(x+1)^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ que se anule en x =1.

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int (x+1)^2\ \cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx=\int \frac{x^2+2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}\cdot dx=\int \left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C=\underline{\frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2+10x+1\right)+C=F(x)}$$

$$F(1)=0\ \Rightarrow\ \frac{2\sqrt{1}}{15}\left(3\cdot 1^2+10\ \cdot 1+1\right)+C=0\ ;;\ \frac{2}{15}(3+10+1)+C=0\ ;;\ \frac{28}{15}+C=0\ ;;$$

$$C=-\frac{28}{15}\ \Rightarrow\ F(x)=\frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2+10x+1\right)-\frac{28}{15}\ ;;\ \underline{\underline{F(x)=\frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2+10x-27\right)}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

Teniendo en cuenta que una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, para que un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas sea compatible e indeterminado es necesario que tengan más de una solución, es decir, que representen un plano o una recta.

Según el Teorema de Rouché, para que un sistema sea compatible e indeterminado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango y que éste sea menor que el número de incógnitas.

1.- Que el rango sea 1:

Las tres ecuaciones representan un plano: supone que las tres ecuaciones son linealmente dependientes. Representan tres planos coincidentes.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{array}\right\} \quad \{E_2 = 2E_1 \;\;;;\;\; E_3 = 3E_1\}.$$

Las soluciones dependen de dos parámetros.

2.- Que el rango sea dos:

Pueden presentarse las dos siguientes situaciones:

2.1.- Dos planos son coincidentes y secantes al tercero.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 4x-3y+2z=4 \end{array}\right\} \quad \{E_2 = 2E_1\}.$$

2.2.- No existen planos coincidentes, los tres planos son secantes en una recta.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} 5x-3y+4z=1 \\ 7x+2y+9z=2 \\ 2x+5y+5z=0 \end{array}\right\} \quad \{E_3 \Rightarrow E_2 - E_1\}.$$

****

2º) Hallar la derivada en el punto x = 0 de la función $f[f(x)]$, donde $f(x) = sen\ x$.

$$F(x) = f[f(x)] = sen\ (sen\ x) = sen\ u \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = sen\ x \\ \\ u' = \cos\ x \end{cases}$$

$$F'(x) = u' \cdot \cos\ u = \underline{\cos\ x \cdot \cos\ (sen\ x) = f'[f(x)]}$$

$$F'(0) = f'[f(0)] = \cos\ 0 \cdot \cos\ (sen\ 0) = 1 \cdot \cos\ 0 = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1 = f'[f(0)]}}$$

****

3º) Hallar un vector de módulo uno que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u} = (0,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 0)$.

El producto vectorial de dos vectores es otro vector ortogonal a los dos vectores que se multiplican.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - 2k + i = i + 2j - 2k = \underline{(1,\ 2,\ -2) = \overrightarrow{w}}$$

El vector pedido es linealmente dependiente de $\overrightarrow{w}$ y de módulo la unidad (se llama versor de $\overrightarrow{w}$); existen dos vectores opuestos que cumplen la condición. Para obtenerlos, basta con dividir al vector $\overrightarrow{w}$ por su módulo.

Soluciones:

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\overrightarrow{w}}{\left|\overrightarrow{w}\right|} = \frac{(1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{(1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{(1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{9}} = \frac{(1,\ 2,\ -2)}{3} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right) = \overrightarrow{a_1}}}$$

$$\overrightarrow{a_2} = -\frac{\overrightarrow{w}}{\left|\overrightarrow{w}\right|} = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \overrightarrow{a_2}}}$$

****

4º) Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $x - y = 1$ y por la curva de ecuación $y = \sqrt{x-1}$. Calcular su área.

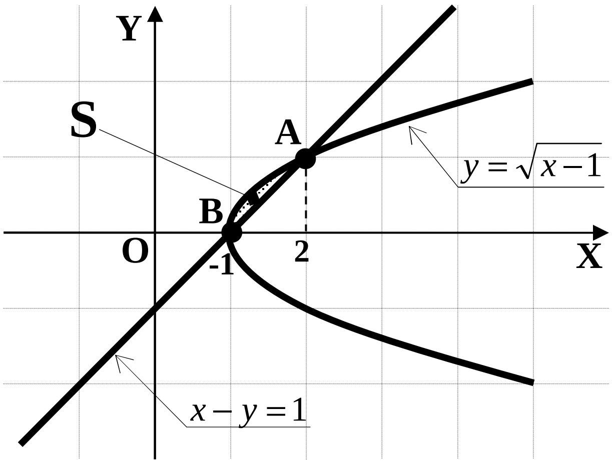
Los puntos de corte de la recta y la curva son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ y = \sqrt{x-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x - \sqrt{x-1} = 1 \;;;\; x - 1 = \sqrt{x-1} \;;;\; x^2 - 2x + 1 = x - 1 \;;;\; x^2 - 3x + 2 = 0 \;;;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 1)} \\ \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{array}\right.$$

La situación aproximada de la situación la indica la figura.

De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:



$$S = \int_1^2 \left[\sqrt{x-1} - (x-1)\right] \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array}\right\| \left.\begin{array}{l} x = 2 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 \left(\sqrt{t} - t\right) \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\ u^2 = S}}$$

****