PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Definir el concepto de primitiva de una función. ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor negativo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

La función F(x) es una función primitiva de la función f(x) en el intervalo cerrado [a, b], cuando $F'(x) = f(x), \ \ \forall x \in [a,\ b]$.

Si F(x) es una función primitiva de f(x) y C es una constante, la función F(x) + C también es una primitiva de f(x), lo cual significa que una función tiene infinitas funciones primitivas, todas aquellas que se diferencian una constante de F(x).

Se denomina integral indefinida de una función al conjunto de sus infinitas funciones primitivas. La integral indefinida de f(x) se expresa de la siguiente forma:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

Para la función $f(x) = x^{-1}$ en el intervalo $1 \leq x \leq 2$, sería:

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x^{-1} \cdot dx = Lx + C$. Por ser F(x) monótona creciente, su mayor valor se produce para x = 2, por lo tanto: $F(2) = L2 + C = 0 \ \Rightarrow \ C = -L2$.

Las funciones primitivas de la forma $F(x) = Lx + C$ no toman ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2, \ \forall C \in R, \{C < -L2\}$.

****

2º) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas A(1, 0, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 2, 0). Determinar la distancia del punto P(2, 1, 1) a dicho plano.

Sea π el plano pedido. Dos vectores directores de π son:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 1,\ 1)}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(0,\ 2,\ 0)}$$

Tomando, por ejemplo el punto A(1, 0, 0), la expresión vectorial de π es:

$$\underline{\underline{\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 0) + \lambda(-1,\ 1,\ 1) + \mu(1,\ 0,\ 0)}}$$

La expresión general de π es:

$$\pi\left\{A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right\} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -2z - 2(x-1) = 0 \ ;;\ z + x - 1 = 0 \ ;;$$

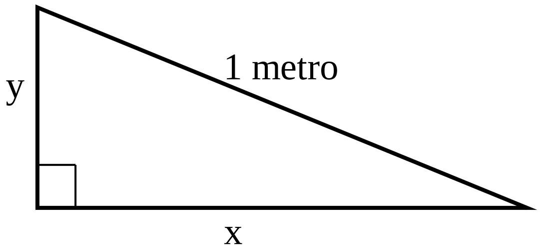
$$\underline{\underline{\pi\left\{A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right\} \equiv x + z - 1 = 0}}$$

La distancia del punto P(2, 1, 1) al plano π es:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2+1-1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\ unidades = d}}$$

****

3º) Determinar el mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida un metro.



$$Área = A = \frac{x \cdot y}{2} \quad (*) \quad \Rightarrow \quad Máximo$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \to \quad y = +\sqrt{1 - x^2}$$

Sustituyendo el valor de y en (*), queda:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - x^4} \quad ;; \quad A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 2x - 4x^3 = 0 \;;;$$

$$2x\left(1 - 2x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to (Para \;\; mínimo) \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \left(carece \;\; de \;\; sentido \;\; lógico\right) \end{cases}$$

$$Para \;\; x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Solución: \; \underline{\underline{x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'71 \;\; metros}}$$

(<u>Se trata de un triángulo rectángulo isósceles</u>)

****

4º) Determinar todas las matrices X tales que A · X = X · A, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sea la matriz pedida $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} a+c=a+b \Rightarrow \underline{b=c} \\ a+c=c+d \Rightarrow \underline{a=d} \end{cases} \right\} \;;; \quad \left. \begin{cases} b+d=a+b \;;;\; b+d=d+b \\ b+d=c+d \Rightarrow \underline{b=c} \end{cases} \right\}$$

$$\underline{\underline{Solución}}: \underline{\underline{X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \forall a,b \in R}}$$

****

REPERTORIO B

1º) ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$$ax + by + cz = d \quad ; \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

Si los planos son paralelos, sus vectores normales también lo son, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n} = (a,\ b,\ c) \\ \overrightarrow{n'} = (a',\ b',\ c') \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overrightarrow{n} = k \cdot \overrightarrow{n'} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Por otra parte, cualquiera de las razones anteriores debe ser diferente a la relación entre los respectivos términos independientes, o sea: $\frac{a}{a'} \neq \frac{d}{d'}$. En caso contrario, los planos serían coincidentes.

****

2º) Hallar una matriz de 3 filas y 3 columnas que tenga 3 elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo.

Sea la matriz pedida puede ser de la forma: $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$, con las condiciones que a continuación se especifican.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} c & d \\ f & 0 \end{vmatrix} = -df \neq 0, \ \forall d, \ f \in R, \ \{d, \ f \neq 0\}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & d \\ e & 0 \end{vmatrix} = -de \neq 0, \ \forall d, \ e \in R, \ \{d, \ e \neq 0\}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & c \\ e & f \end{vmatrix} = -ce \neq 0, \ \forall c, \ e \in R, \ \{c, \ e \neq 0\}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ f & 0 \end{vmatrix} = -bf \neq 0, \ \forall b, \ f \in R, \ \{b, \ f \neq 0\}$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a & b \\ e & 0 \end{vmatrix} = -be \neq 0, \ \forall b, \ e \in R, \ \{b, \ e \neq 0\}$$

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ e & f \end{vmatrix} = af \neq 0, \ \forall a, \ f \in R, \ \{a, \ f \neq 0\}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = -bc \neq 0, \ \forall b, \ c \in R, \ \{b, \ c \neq 0\}$$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ab \neq 0, \ \forall a, \ b \in R, \ \{a, \ b \neq 0\}$$

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac \neq 0, \ \forall a, \ c \in R, \ \{a, \ c \neq 0\}$$

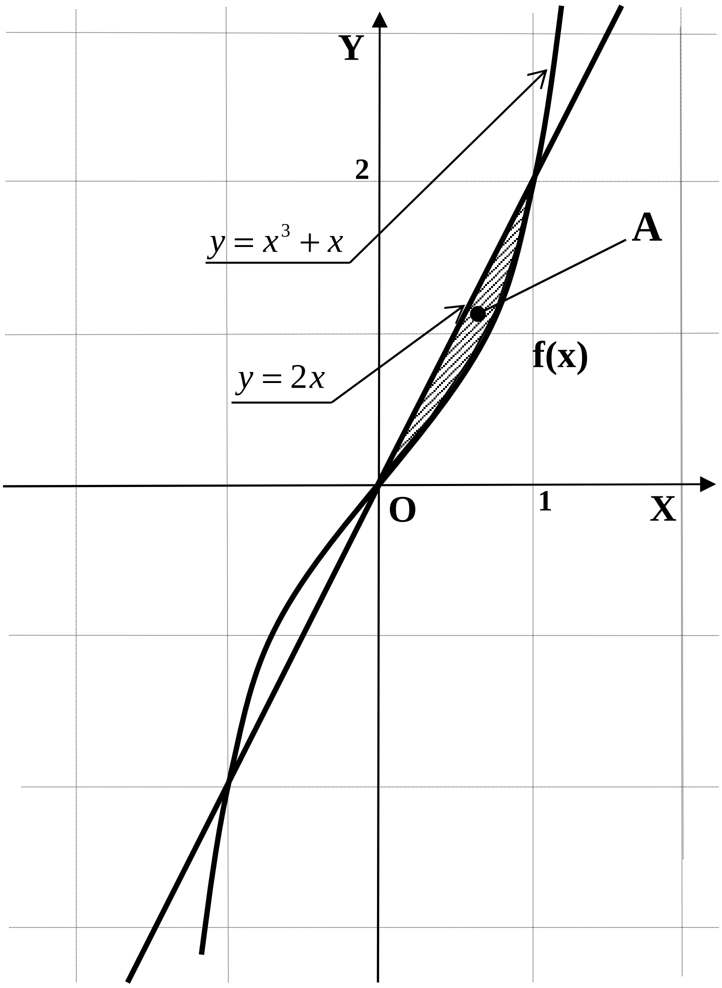
$$\underline{\underline{Se \ cumple \ lo \ pedido \ \forall a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f \in R, \ \{a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f \neq 0\}}}$$

****

3º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado, en la región donde la abscisa x sea positiva, por la curva $y = x^3 + x$, por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:

$$x^3 + x = 2x \ ;; \ x^3 - x = 0 \ ;; \ x(x^2 - 1) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \ \rightarrow \ \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 1 \ \rightarrow \ \underline{P(1,\ 2)} \\ x_3 = -1 \ \rightarrow \ \underline{Q(-1,\ -2)} \end{cases}$$



Para determinar las características de la curva obtendremos sus derivadas para estudiar el crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos relativos y concavidad y convexidad:

$$y = x^3 + x \ ;; \ y' = 3x^2 + 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y' > 0,\ \forall x \in R \ \Rightarrow$$

<u>Monótona creciente en su dominio, que es R</u>.

$$y' \neq 0,\ \forall x \in R \ \Rightarrow$$

<u>No tiene máximos ni mínimos relativos</u>.

(lógico, según el párrafo anterior).

$$y'' = 6x \ \Rightarrow \begin{cases} y'' > 0 \ \rightarrow \ \underline{x > 0 \ \Rightarrow \ Convexa \ \ (\cup)} \\ y'' < 0 \ \rightarrow \ \underline{x < 0 \ \Rightarrow \ Cóncava \ \ (\cap)} \end{cases}$$

Con los datos anteriores podemos hacer una representación gráfica aproximada, tal como se refleja en la figura.

El área pedida es la que figura rayada en la figura.

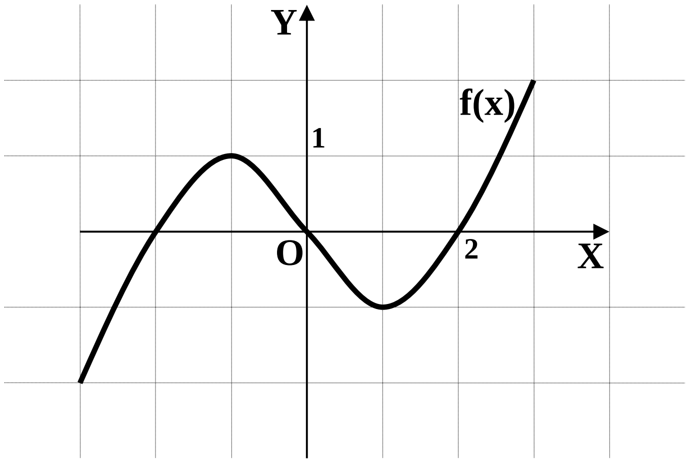
Su valor es el siguiente:

$$A=\int_0^1\left[(2x)-\left(x^3+x\right)\right]\cdot dx=\int_0^1\left(2x-x^3-x\right)\cdot dx=\int_0^1\left(x-x^3\right)\cdot dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-(0-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2-1}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{4}\ unidades\ \ cuadradas=A}}$$

****

4º) Si la gráfica de una función f(x) es:



Representar aproximadamente la gráfica de la función f'(x).

De la observación de la figura, simétrica con respecto al origen (función impar), que corta a los ejes en los puntos O(0, 0), A(-2, 2) y B(2, 0), se deduce que la función f(x) es la siguiente:

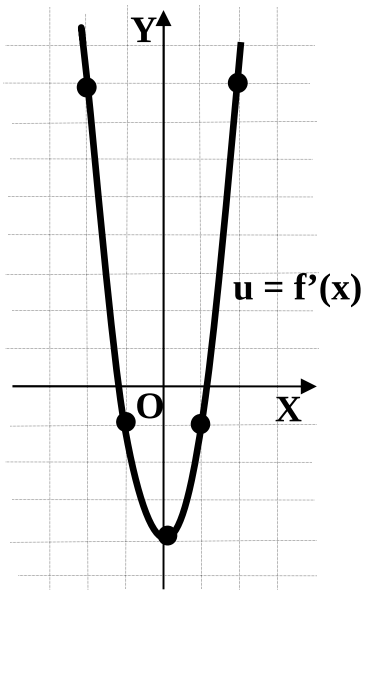
$$f(x) = x(x-2)(x+2) = x(x^2-4) = \underline{x^3 - 4x = f(x)}$$

Llamando u a la función derivada, sería:

$$u = f'(x) = 3x^2 - 4 \;\;;;\;\; u' = f''(x) = 6x \;\;;;\;\; u'' = f'''(x) = 6$$

$$u' = 6x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = 0} \;\;;;\;\; u'' = 6 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo\ P(0, -4)}$$

La función $u = f'(x)$ es una parábola convexa $(\cup)$, cuya gráfica es la que se representa a continuación:



****