PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Definir el concepto de rango de una matriz. Dar un ejemplo de una matriz con tres filas y cuatro columnas que tenga rango 2.

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

Ejemplos de matrices con tres filas y cuatro columnas que tenga rango 2 pueden ser:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3^{a}\ \textit{fila es proporcional a la}\ 1^{a}\\ 4^{a}\ \textit{fila es suma de}\ 1^{a}\ \textit{y}\ 2^{a}\end{matrix}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{3^{a}C\ \rightarrow 1^{a}C+2\cdot 2^{a}C\right\}$$

****

2º) Determinar una recta r que sea paralela al plano α que pasa por los puntos de coordenadas A(1, 1, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 1) y que también sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv x+2y+3z=0$ y que no esté contenida en ninguno de éstos dos planos.

Los puntos $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(1,\ 0,\ 1)$ y $C(0,\ 1,\ 1)$ determinan los vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (-1,\ 0,\ 1)$$

$$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -(x-1)-(y-1)-z=0\ ;;$$

$$-x+1-y+1-z=0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x+y+z-2=0}}$$

Los planos π y π' determinan la recta $s \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.

Expresando la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x+y=2-\lambda \\ x+2y=-3\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -x-y=-2+\lambda \\ x+2y=-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ \underline{y=-2-2\lambda}$$

$$x+y=2-\lambda\ ;;\ x-2-2\lambda=2-\lambda\ ;;\ \underline{x=4+\lambda}$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

La recta r que estamos buscando es cualquiera que sea paralela a s y no pertenezca a ninguno de los planos dados.

Por ejemplo, el punto P(1, 2, 3) no pertenece a ninguno de los plano dados:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}}}$$

****

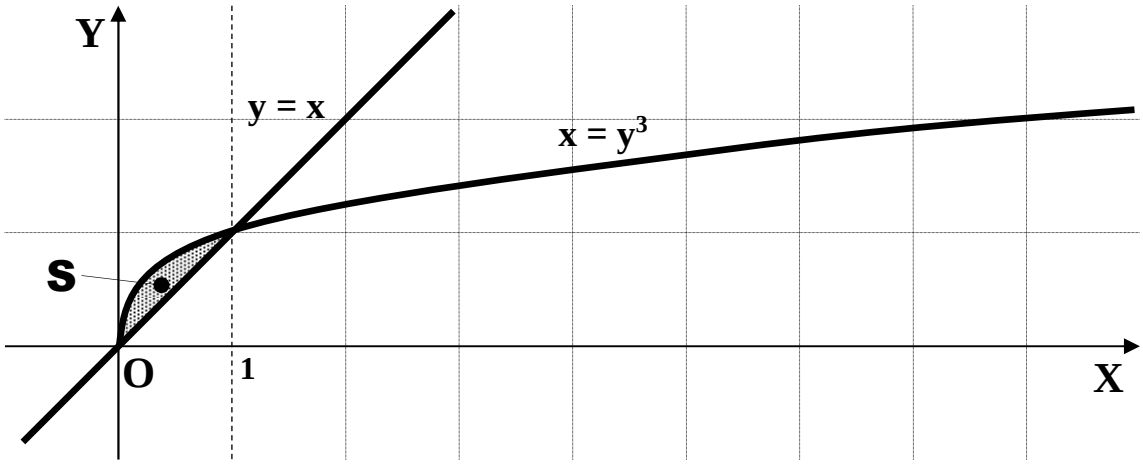
3º) Representar gráficamente la figura plana en el primer cuadrante $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ limitada por la recta $y = x$ y la curva $x = y^3$. Calcular su área.

En el intervalo $[0,\ \infty)$, los puntos de corte de las dos funciones son los siguientes:

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ x = y^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ y = y^3\ ;;\ y - y^3 = 0\ ;;\ y(1 - y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{y_1 = 0} \\ \underline{y_2 = 1} \end{cases}$$

$$y = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}\ ;;\ y = 1 \rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{P(1,\ 1)}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:

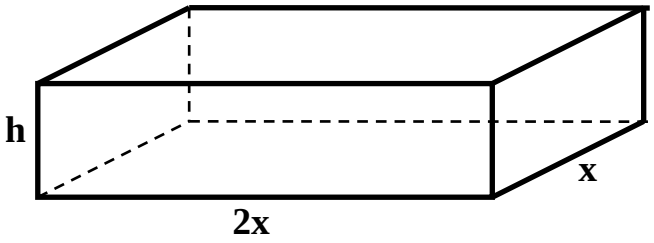


$$S = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x\right) \cdot dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{S = \frac{1}{4}\ u^2}}$$

****

4º) Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



$$V=(2x)^2\cdot h=4x^2\cdot h=9\ litros=9\ dm^3\ \Rightarrow\ \ h=\frac{9}{4x^2}\qquad (*)$$

$$S=2\cdot(x\cdot 2x)+2\cdot(2x\cdot h)+2\cdot(x\cdot h)=4x^2+6hx=4x^2+6x\cdot\frac{9}{4x^2}=$$

$$=4x^2+\frac{27}{2x}=\underline{\frac{8x^3+27}{2x}=S}$$

Para que el área sea mínima, la derivada de la superficie tiene que ser cero:

$$S'=\frac{24x^2\cdot 2x-(8x^3+27)\cdot 2}{4x^2}=\frac{24x^3-8x^3-27}{2x^2}=\frac{16x^3-27}{2x^2}=0\ \Rightarrow\ 16x^3-27=0\ ;;$$

$$16x^3=27\ ;;\ x^3=\frac{27}{16}\ ;;\ x=\sqrt[3]{\frac{27}{16}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{4}=\underline{\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{4}=x}$$

Sustituyendo el valor de x en (*):

$$h=\frac{9}{4x^2}=\frac{9}{4\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{4}\right)^2}=\frac{9}{\frac{4\cdot 9\cdot\sqrt[3]{16}}{16}}=\frac{9\cdot 16}{4\cdot 9\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}=\underline{\sqrt[3]{4}=h}$$

Las dimensiones del paralelepípedo son: base $\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{4}\,x\,\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$ *y altura* $\sqrt[3]{4}$

****

REPERTORIO B

1º) Enunciar el Teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

La ecuación x = cos x se puede considerar como una función f(x) = x – cos x.

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores finitos de x, a y b, tales que: f(a) < 0 y f(b) > 0:

Por ejemplo:

$$f(0) = 0 - \cos\ 0 = -1 < 0\ \ ;;\ \ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función f(x) = x – cos x tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$y, como consecuencia, la ecuación x = cos x tiene al menos una solución positiva en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

****

2º) ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0? ¿y permanecer igual? Justificar las respuestas.

La respuesta a la primera pregunta es afirmativa. En efecto: supongamos que una matriz de 3 filas tiene una de ellas que es combinación lineal de las otras dos; en este caso el mayor rango que puede tener la matriz es dos; sin embargo, si se sustituye por cero un coeficiente no nulo de cualquiera de las filas dejan de ser linealmente dependientes y, en consecuencia el rango sería tres.

A la segunda pregunta de si puede permanecer igual, la respuesta también es afirmativa: si las tres filas son linealmente independientes y al sustituir el coeficiente no nulo por cero siguen siendo independientes, el rango era tres y sigue siendo tres.

Para confirmar lo expuesto se ilustra a continuación con un ejemplo de cada caso:

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ cuya última fila es la suma de las dos primeras; si se sustituye por cero cualquier valor distinto de cero, la última fila es linealmente independiente de las dos primeras, con lo cual el rango puede ser tres.

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es tres:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 3 = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rang\ B = 3}$$

Si sustituimos el valor 3 por 0, resulta:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rang\ B = 3}$$

Como se observa, no cambia el rango de B.

****

3º) Calcular el valor de la integral $I = \int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}\cdot dx$. (Puede hacerse con $x^2-1=t^3$).

$$I = \int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} x^2-1=t^3 & x=2\rightarrow t=\sqrt[3]{3} \\ 2x\,dx=3t^2\,dt & x=1\rightarrow t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\int_{01}^{\sqrt[3]{3}} t^2\cdot\sqrt[3]{t^3}\cdot dt = \frac{3}{2}\int_{01}^{\sqrt[3]{3}} t^2\cdot dt = \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^4}{4}-0 = \underline{\underline{\frac{9\sqrt[3]{3}}{8}=I}}$$

****

4º) Determinar los puntos de la curva plana $y^3 = 2x$ en que la recta tangente es perpendicular a la recta $r \equiv y + 6x = 0$.

La pendiente de la recta r es: $r \equiv y + 6x = 0$;; $y = -6x \Rightarrow \underline{m = -6}$.

Como nos piden que la tangente sea perpendicular a la recta cogeremos la pendiente m', que es inversa y de signo contrario a m: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-6} = \underline{\frac{1}{6} = m'}$

La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto:

$$y^3 = 2x \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y' = \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \sqrt[3]{2} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}}$$

$$y' = m' = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{6} \;;;\; \frac{2}{x^2} = \frac{1}{6^3} \;;;\; x^2 = 2 \cdot 6^3 \;;;\; x = \pm\sqrt{2 \cdot 6^3} = \pm 12\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 12\sqrt{3}} \\ \\ \underline{x_2 = -12\sqrt{3}} \end{cases}$$

Los puntos de tangencia son:

$$P_1 \rightarrow x_1 = 12\sqrt{3} \Rightarrow {y_1}^3 = 12\sqrt{3} = \sqrt{432} \Rightarrow y_1 = \sqrt[6]{432} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(12\sqrt{3},\ \sqrt[6]{432}\right)}}$$

$$P_2 \rightarrow x_2 = -12\sqrt{3} \Rightarrow {y_2}^3 = -12\sqrt{3} = -\sqrt{432} \Rightarrow y_2 = -\sqrt[6]{432} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-12\sqrt{3},\ -\sqrt[6]{432}\right)}}$$

****