PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Determinar un valor del parámetro a para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ y+2z=a \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Para que las ecuaciones sean linealmente dependientes es necesario que los rangos de ambas matrices sean iguales y menores que tres. Es evidente que $\forall a \in R$ el rango de ambas es ≥ 2.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+3-1-6=0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; de\;\; M=2}.$$

Veamos el rango de M’:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2a+3-1-3a=0 \;;;\; 2-a=0 \;;;\; \underline{a=2}$$

$$\{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a+6-2-3a=0\ \ ;;\ \ 4-2a=0\ \ ;;\ \ \underline{a=2}$$

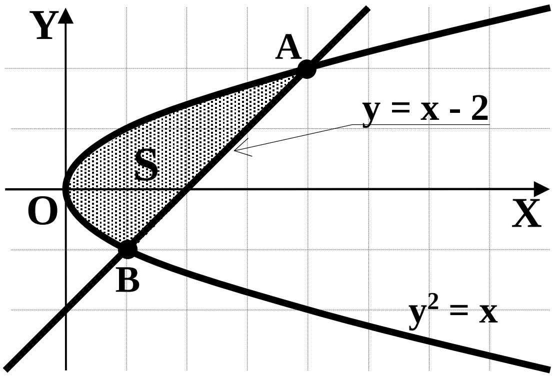
$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a+4+1-1-2-2a\ \ ;;\ \ 2-a=0\ \ ;;\ \ \underline{a=2}$$

De lo anterior se deduce que el único valor de a es el siguiente:

$$\underline{\underline{a=2}}$$

****

2º) Representar gráficamente el recinto limitado por la recta $y = x - 2$ y la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcular su área.



Se trata de una parábola con vértice en el origen y simétrica con respecto al eje Y.

Los puntos de corte de la parábola y la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 = x \;;\; x^2 - 4x + 4 = x \;;$$

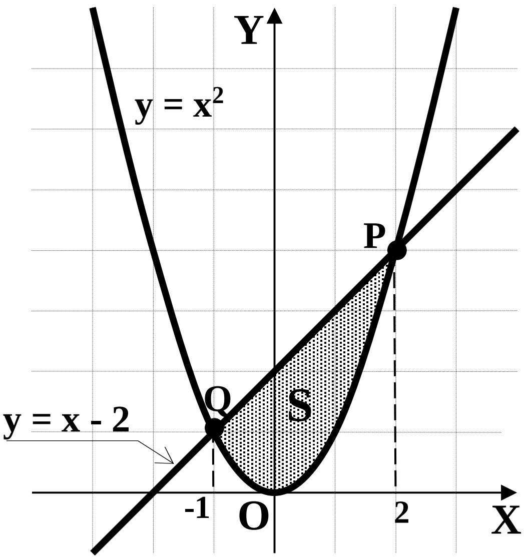
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \;;\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 4 \;\rightarrow\; \underline{A(4,\; 2)} \\ \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; \underline{B(1,\; -1)} \end{array}\right.$$

La representación gráfica de la situación es la figura anterior.

Como puede apreciarse, la curva no es una función, por lo tanto no se puede aplicar el cálculo integral de forma directa. Para calcular un área de este tipo es muy conveniente representar las funciones inversas, es decir, producir un giro de todo el conjunto de 90º a la izquierda, con lo cual resulta:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; inversas \; \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = y \\ x = y - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ \underline{y = x + 2} \end{array}\right\}$$

Las gráficas de las inversas y la situación es la que indica la gráfica siguiente.



El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} (x+2) \cdot dx - \int_{-1}^{2} x^2 \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4'5\; u^2 = S}}$$

****

3º) Representar gráficamente la función $f(x)=e^x-e\cdot x$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos). ¿Existe algún valor de x en el que f(x) sea negativo?

Dominio: Por tratarse de una función compuesta por la suma algebraica de dos funciones continuas cuyo dominio es R, el dominio de f(x) es R.

Recorrido: $Es\ \ [0,\ +\infty]$ (Se justifica en el apartado de máximos y mínimos relativos)

Como consecuencia de lo anterior, la función ni tiene ningún valor de x para el cual la ordenada es negativa.

Corte con los ejes: $\begin{cases} X \to y=f(x)=0 \Rightarrow e^x-e\cdot x \Rightarrow x=1 \to \underline{\underline{A(1,\ 0)}} \\ \\ Y \to x=0 \Rightarrow y=f(0)=e^0-0\cdot x=1 \to \underline{\underline{B(0,\ 1)}} \end{cases}$

Crecimiento-decrecimiento; máximos y mínimos:

$$f'(x)=e^x-e=0 \Rightarrow e^x=e \Rightarrow \underline{x=1} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \to f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente\ \ en\ \ (1,\ \infty)}} \\ \\ x<1 \to f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente\ \ en\ \ (-\infty,\ 1)}} \end{cases}$$

$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(1)=e^1=e>0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \Rightarrow A(1,\ 0)}}$$

Puntos de inflexión: $f''(x)=0 \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ P.\ I.}}$

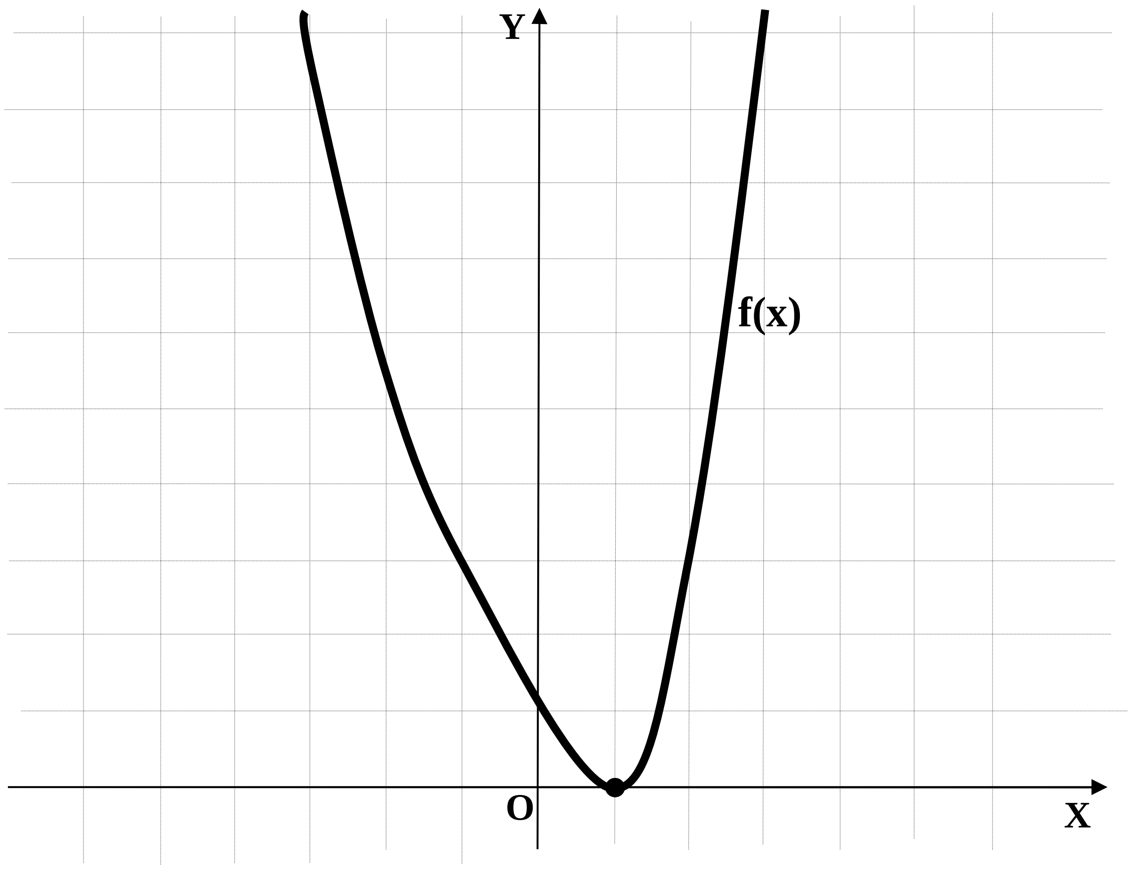
Concavidad y convexidad: $f''(x)=e^x>0 \Rightarrow \forall x\in R \Rightarrow \underline{\underline{f(x)\ \ es\ \ convexa\ \ en\ \ R}}$

Asíntotas: No tiene.

Tabla de valores:

x	0	1	-1	2	-2	3
y	1	0	3’09	2’95	5’56	11’9

Representación gráfica:



****

4º) Determinar una constante a para que el plano de ecuación $\pi_1 \equiv ax + y + z = 2$ forme un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes con el plano $\pi_2 \equiv z = 0$.

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que el que forman sus respectivos vectores normales $\overrightarrow{w_1} = (a,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{w_2} = (1,\ 1,\ 0)$. (Téngase en cuenta que el vector normal al plano z = 0 es cualquiera que tenga nula su tercera componente sin ser nulas ninguna de las otras dos y que $\frac{\pi}{3}$ radianes = 60º)

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = \left|\overrightarrow{w_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{w_2}\right| \cdot \cos V \Rightarrow (a,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 1,\ 0) = \sqrt{a^2 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1+1} \cdot \cos 60^o \ ;;$$

$$a + 1 + a = \sqrt{a^2 + 2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \ ;;\ 2(a+1) = \sqrt{2a^2 + 4} \ ;;\ 4(a^2 + 2a + 1) = 2a^2 + 4 \ ;;$$

$$4a^2 + 8a + 4 = 2a^2 + 4 \ ;;\ 2a^2 + 8a = 0 \ ;;\ a^2 + 4a = 0 \ ;;\ a(a+4) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{a_1 = 0}} \\ \underline{\underline{a_2 = -4}} \end{cases}$$

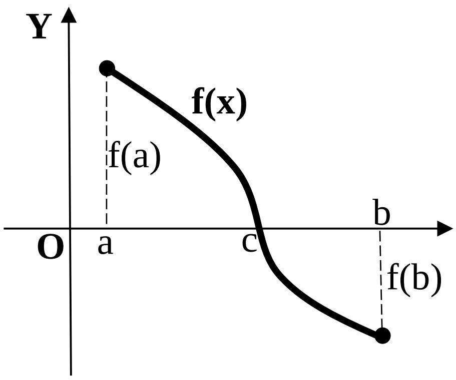
****

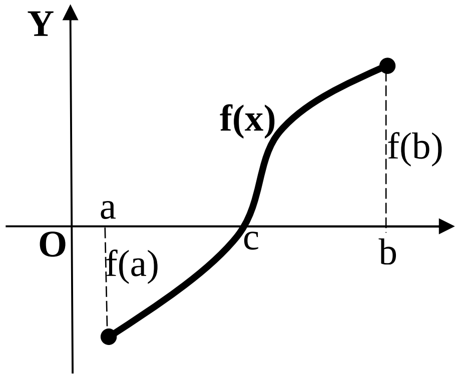
REPERTORIO B

1º) Enunciar el Teorema de Bolzano y determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".





Considerando la función $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$, que es continua en su dominio, que es R, por lo tanto lo será en cualquier intervalo real considerado; por ejemplo, tomando como intervalo $[-3,\ 0]$ y aplicando el teorema:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3) = (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 - 1 = 81 - 36 - 1 = 44 > 0 \\ \\ f(0) = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \underline{\underline{\exists c \Rightarrow R \ \Rightarrow \ f(c) = 0}}$$

Lo anterior demuestra que el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene al menos una raíz real negativa en el intervalo $[-3,\ 0]$, como teníamos que determinar.

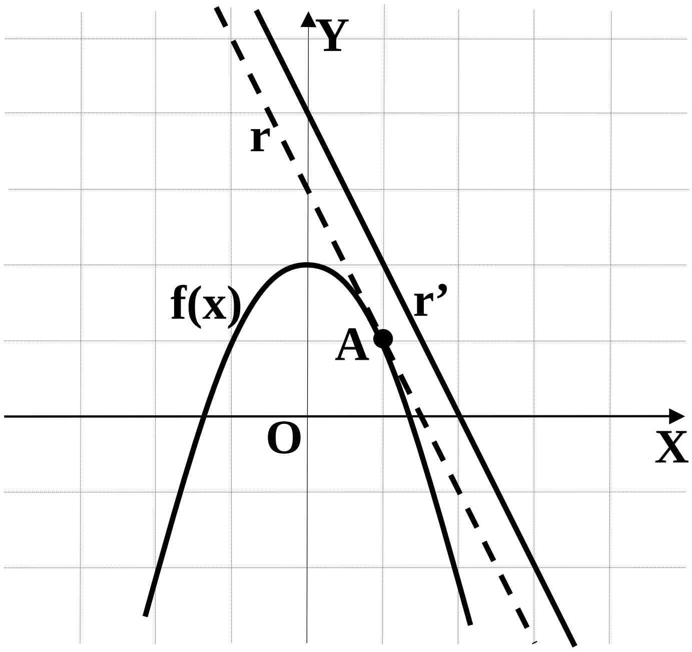
****

2º) Calcular el valor de la integral $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot L\,x}$, donde L denota logaritmo neperiano. (Puede hacerse con el cambio de variable $x = e^t$).

$$I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot L\,x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} L\,x = t & x = e^2 \to t = 2 \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt & x = e \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{t} = [L\,t]_1^2 = L\,2 - L\,1 = \underline{\underline{L\,2 = I}}$$

****

3º) Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.



La pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ en cualquier punto viene dada por la derivada en ese punto.

Por otra parte, la recta r expresada en forma explícita es de la forma $y = -2x + 4$, donde se observa que la pendiente es - 2 .

La recta pedida, r', por ser paralela a r, también tiene de pendiente - 2.

La representación gráfica de la situación es la figura adjunta.

$y' = -2x = -2 \Rightarrow x = 1$;; $y(1) = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)}$.

La recta punto-pendiente viene dada por la expresión: $y - y_0 = m(x - x_0)$; aplicándola a nuestro caso:

$y - 1 = -2(x - 1)$;; $y - 1 = -2x + 2$;; $\underline{\underline{r' \equiv 2x + y - 3 = 0}}$

****

4º) Calcular dos números naturales a y b, menores que 10 y tales que $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$ tenga de rango 2.

Para que la matriz A tenga rango 2 es necesario que $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \;\; ;; \;\; 10b + 6a - 15b - 2a = 0 \;\; ;; \;\; 4a - 5b = 0 \;\; ;; \;\; 4a = 5b \;\; ;; \;\; \underline{a = \frac{5b}{4}}$$

Para que a sea un número natural y menor que 10 es necesario que b sea múltiplo de 4 y menor que 10, con lo cual, solamente puede tomar los valores de b = 4 y b = 8:

$b = 8 \;\Rightarrow\; a = \frac{5 \cdot 8}{4} = \frac{40}{4} = 10 \;\Rightarrow\;$ No es posible; a tiene que ser menor que 10.

$b = 4 \;\Rightarrow\; a = \frac{5 \cdot 4}{4} = 4 \;\Rightarrow\;$ Si es posible.

$$\underline{\underline{\textit{Solución}: \;\; a = 4 \;\; ;; \;\; b = 5}}$$

****