

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****SEPTIEMBRE - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas compatible representa a tres planos en el espacio que tienen, por lo menos, un punto en común. Si únicamente tienen un punto en común el sistema es compatible determinado; si tienen más de un punto en común el sistema es compatible indeterminado, pudiendo presentarse los dos siguientes casos:

1º) Que los tres planos sean coincidentes.

$$\text{Ejemplo: } \left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 9 \\ 2x - 2y + 4z = 6 \end{array} \right\}$$

2º) Que dos planos sean coincidentes y secantes al tercero, en cuyo caso tienen una recta en común.

$$\text{Ejemplo: } \left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 9 \\ x + 2y + 3z = 16 \end{array} \right\}$$

3º) Que los planos sean secantes en una recta, es decir, que constituyan un haz de planos, por ejemplo:

$$(x + y + z - 1) + \lambda(3x - y + 2z + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = 0 \rightarrow x + y + z = 1 & x + y + z = 1 \\ \lambda = 1 \rightarrow 4x + 3z = -1 & \Rightarrow 4x + 3z = -1 \\ \lambda = 2 \rightarrow 7x - y + 5z = -5 & 7x - y + 5z = -5 \end{array} \right.$$

2º) Con un alambre de 2 metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de las áreas sea mínima.

Llamando l_1 a la longitud del cuadrado y l_2 a la longitud del círculo; r al radio del círculo y l al lado del cuadrado:

$$L = l_1 + l_2 = 4 \cdot l + 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \text{ metros} ; ; 2l + \pi r = 1 ; ; l = \frac{1 - \pi r}{2} \quad (*)$$

$$A = l^2 + \pi r^2 = \left(\frac{1 - \pi \cdot r}{2} \right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 - 2\pi r + \pi^2 r^2}{4} + \pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 2\pi r + \pi^2 r^2 + 4\pi r^2) = A$$

$$A' = \frac{1}{4} (-2\pi + 2\pi^2 r + 8\pi r) = 0 \Rightarrow ; ; 2\pi(-1 + \pi r + 4r) = 0 ; ; r(\pi + 4) = 1 ; ;$$

$$\underline{\underline{r = \frac{1}{\pi + 4} \text{ metros}}}$$

$$l = \frac{1 - \pi r}{2} = \frac{1 - \pi \cdot \frac{1}{\pi + 4}}{2} = \frac{1 - \frac{\pi}{\pi + 4}}{2} = \frac{\pi + 4 - \pi}{2(\pi + 4)} = \frac{2}{\pi + 4} = l = 2r$$

Expresados en centímetros, aproximadamente, es:

$$r = \frac{100}{3'14 + 4} = \frac{100}{7'14} \cong \underline{\underline{14 \text{ cm} = r}} ; ; l = 2r \cong \underline{\underline{28 \text{ cm} = \ell}}$$

3º) Calcular el valor de $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$. (Puede hacerse con el cambio de variable $t = e^{-x}$).

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} \cdot dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} \cdot dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x}{e^x + 1} \cdot dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx = [x]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx = 1 - 0 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx = 1 - I_1 = I \quad (*)$$

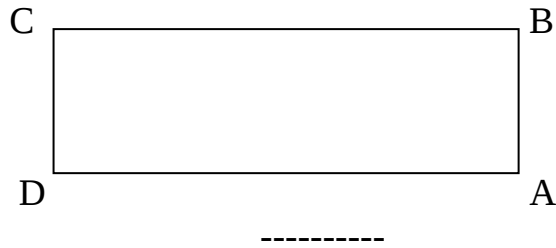
$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow t = e + 1 \\ x = 0 \rightarrow t = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int_2^{e+1} \frac{dt}{t} = [Lt]_2^{e+1} =$$

$$= L(e+1) - L2 = \underline{L \frac{e+1}{2}} = I_1$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1 queda:

$$I = 1 - L \frac{e+1}{2} \cong 1 - L1'86 \cong \underline{\underline{0'38 \, u^2}} = I$$

4º) Sabiendo que los lados de un rectángulo ABCD miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}$.



Considerando unos ejes de coordenadas cuyo origen es D, las coordenadas de los puntos son las siguientes: D(0, 0), C(0, 1), B(3, 1) y A(3, 0).

Los vectores son los siguientes:
$$\begin{cases} \overrightarrow{CB} = B - C = (3, 1) - (0, 1) = (3, 0) \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (0, 0) - (3, 0) = (-3, 0) \\ \overrightarrow{BA} = A - B = (3, 0) - (3, 1) = (0, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = (3, 0) \cdot (-3, 0) = -9 + 0 = -9 = \underline{\underline{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}}}$$

$$\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = |-3k| = 3 = \underline{\underline{\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}}}$$

REPERTORIO B

1º) Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con dos filas y dos columnas, tales que $A \cdot B$ no coincida con $B \cdot A$.

Sean las matrices A y B. Para que pueda efectuarse su producto sus dimensiones tienen que ser las siguientes: A, $m \times k$; B, $k \times n$. Es decir: para que dos matrices puedan multiplicarse es necesario que: el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. La dimensión de la matriz producto P es $m \times n$.

Para explicar el proceso de la multiplicación de dos matrices, supongamos el producto de una matriz fila F, $1 \times n$, por otra matriz columna, C, $n \times 1$. El producto sería:

$$F \cdot C = (f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_n c_n$$

Supongamos ahora las matrices A, de dimensión $m \times k$, a cuyas filas llamaremos de la forma $F_1, F_2, \dots, F_m$ y B, de dimensión $n \times k$, a cuyas columnas llamaremos de la forma $C_1, C_2, \dots, C_n$.

La matriz producto $A \cdot C$ se expresa de la forma:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & \cdots & F_1 \cdot C_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_m \cdot C_1 & \cdots & F_m \cdot C_n \end{pmatrix}$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Distributiva por la derecha y por la izquierda de la multiplicación con res-

pecto a la suma:
$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{array} \right\}$$

En el caso particular de matrices cuadradas, existe el elemento neutro, I, tal que:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

En general, tratándose de matrices cuadradas, no se cumple la propiedad conmutativa.

Un ejemplo de producto de $A \cdot B$, ambas de dimensión 2×2 que no cumplan la propiedad conmutativa puede ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; ; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A \cdot B \neq B \cdot A}}$$

2º) Determinar un plano π que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, y también sea paralelo a la recta s que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

El plano pedido π , puede definirse por los vectores directores de las rectas r y s y por el punto $O(0, 0, 0)$.

La expresión mediante ecuaciones paramétricas de la r es:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{z=k} \begin{cases} x+y=1 \rightarrow x=1-y=1-2+k=-1+k=x \\ y=2-k \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+k \\ y=2-k \\ z=k \end{cases}$$

Un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

Un vector director de s es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$

$$\pi(O; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -x - y - z - y = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv x + 2y + z = 0}}$$

3º) Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = e^x$, su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$, y la recta $x = 1$. Calcular su área.

El punto de tangencia es: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y_{(0)} = e^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(0, 1)}$

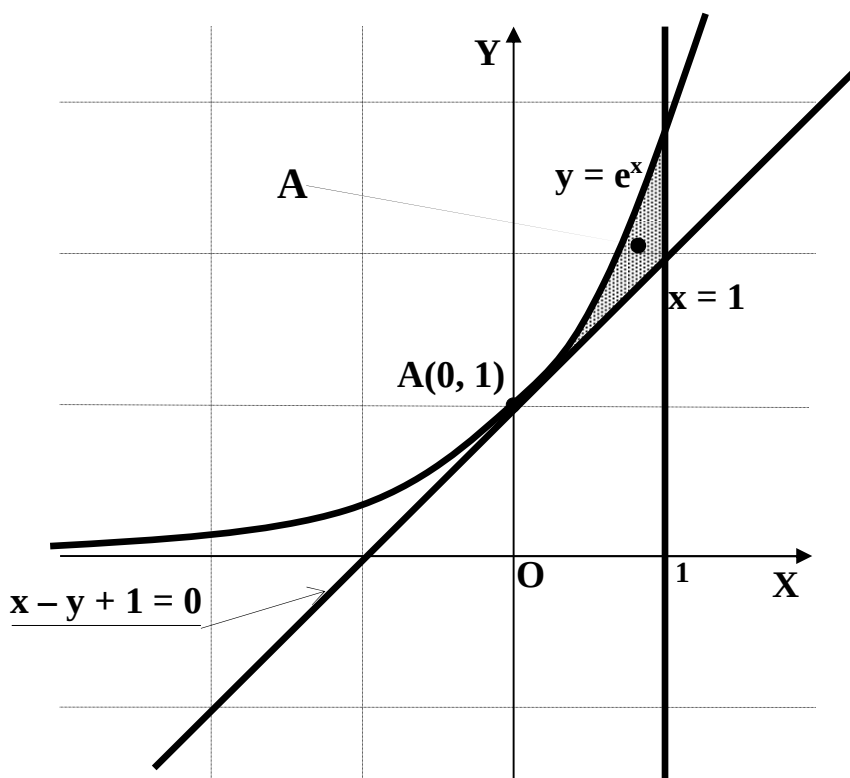
La pendiente de la recta tangente es m , que se obtiene como sigue:

$$y = e^x \quad ; \quad y' = e^x \Rightarrow m = y'(0) = e^0 = 1$$

Sabiendo que la expresión de una recta conocida la pendiente viene dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la tangente, t , es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \quad ; \quad t \equiv x - y + 1 = 0$$

La representación gráfica de la situación es la que sigue:



$$A = \int_0^1 [e^x - (x+1)] \cdot dx = \int_0^1 (e^x - x + 1) \cdot dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} + 1 \right) - (e^0 - 0 + 0) =$$

$$= e - \frac{1}{2} + 1 - 1 = \underline{\underline{\frac{2e-1}{2}}}$$

4º) Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x) = e^x \cdot x^{-2}$.

$$f(x) = e^x \cdot x^{-2} = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} = f'(x)$$

Para determinar el signo de la derivada es necesario estudiar el numerador y el denominador, teniendo en cuenta que $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Numerador} > 0 \Rightarrow x > 2 \\ \text{Denominador} > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

Es esquema siguiente facilita la comprensión de la solución.

