PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2002

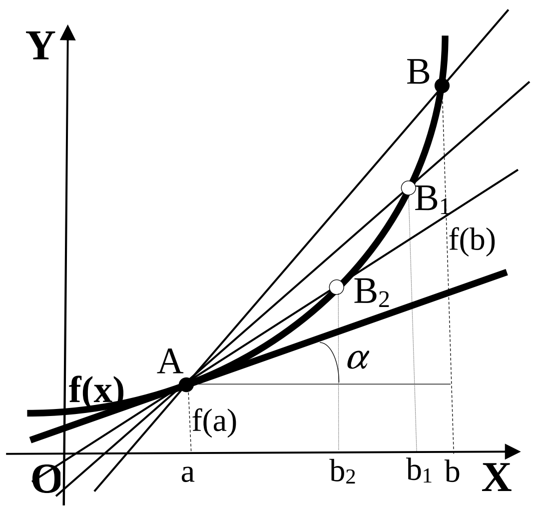
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Definir el concepto de derivada de una función f(x) en un punto x = a y explicar su relación con el crecimiento de la función.



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

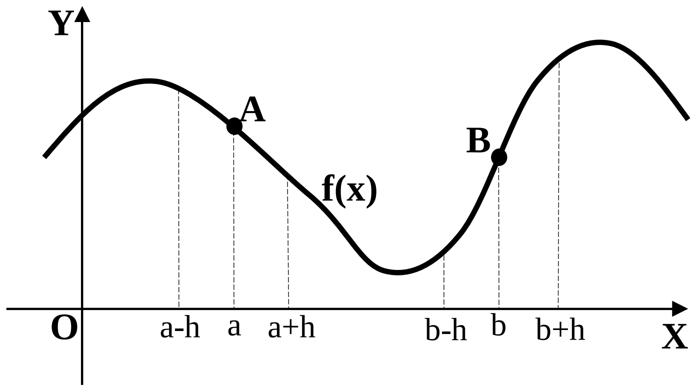
La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.



En un punto de la función A, cuya abscisa es a, donde la función es decreciente se observa que a un incremento positivo de a el valor de la función es negativo y viceversa, es decir, que si se divide el incremento de la función entre el incremento de la variable independiente, el cociente, que en el límite cuando el incremento tiende a cero es la derivada, es siempre negativo, lo cual implica necesariamente que:

Una función es decreciente en un punto cuando su derivada es negativa.

En el punto B, de abscisa b, la función es creciente y se observa que a un incremento positivo de b el valor de la función disminuye y viceversa, lo cual significa, por un razonamiento similar al anterior que:

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva.

****

2º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=a \end{array}\right\}$ según el valor del parámetro a.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \;;\; M'=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & a \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a-a^3=a\left(1-a^2\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{a_1=0} \\ \underline{a_2=1} \\ \underline{a_3=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\;\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^{o}\; incóg.\Rightarrow Compatible\;\; Determinado}}$$

$$Para\;\; a=0\;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\, a=0\;\Rightarrow\; Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2<n^{o}\;\; inc.\Rightarrow Compatible\;\; Indeterminado}}$$

$$Para\;\; a=1\;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2=F_3\}\Rightarrow\underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\, a=1\;\Rightarrow\; Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2<n^{o}\;\; inc.\Rightarrow Compatible\;\; Indeterminado}}$$

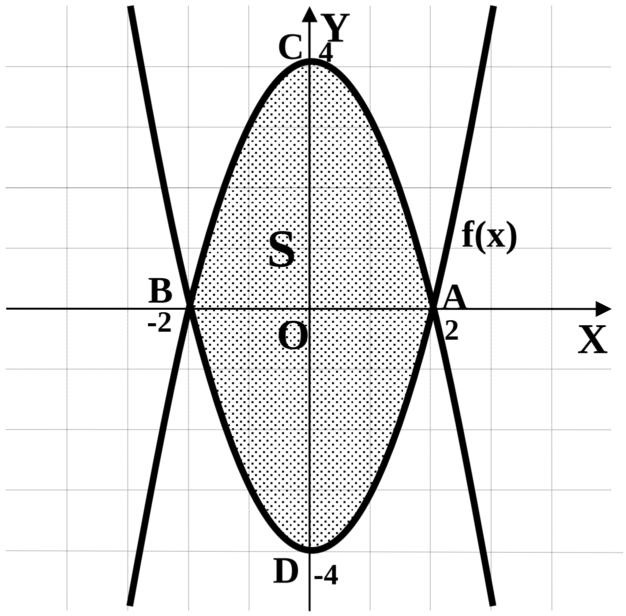
$$Para\;\; a=-1\;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\quad Veamos\;\; cual\;\; es\;\; el\;\; rango\;\; de\;\; M':$$

$$\{C_1,\; C_2,\; C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0\;\Rightarrow\;\underline{Rango\;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\, a=-1\;\Rightarrow\; Rango\;\; M\neq Rango\;\; M'\Rightarrow Incompatible}}$$

****

3º) Representar gráficamente y calcular el área de la figura plana delimitada por las siguientes parábolas: $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$.



Las dos parábolas son funciones opuestas y simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con los ejes de las funciones son:

Eje X $\rightarrow y = 0$:

$$y = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

$$\text{Eje Y:} \rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \rightarrow y = 4 \Rightarrow \underline{C(0,\ 4)} \\ y = x^2 - 4 \rightarrow y = -4 \Rightarrow \underline{D(0,\ -4)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se puede observar en el gráfico.

Como consecuencia de las simetrías de las funciones, el área pedida es:

$$S = 4 \cdot \int_0^2 \left(4 - x^2\right) \cdot dx = 4 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 \cdot \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 4 \cdot \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 4 \cdot \frac{16}{3} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{64}{3}\ u^2 = S}}$$

****

4º) Hallar dos vectores linealmente dependientes que sean ortogonales al vector $\overrightarrow{e} = (1,\ 1,\ 3)$.

Sean los vectores pedidos $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u},\ \forall k \in R,\ \{k \neq 0\}$.

Por ser los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$ ortogonales a $\overrightarrow{e}$ tiene que cumplirse que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e} = 0$$

Como existen infinitos vectores que cumplen la condición, fijamos dos de sus componentes y calculamos la tercera, por ejemplo: $\overrightarrow{u} = (1,\ 2,\ x)\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = (k,\ 2k\ \ kx)$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e} = (1,\ 2,\ x) \cdot (1,\ 1,\ 3) = 1 + 2 + 3x = 3 + 3x = 0\ \ ;;\ \ 3x = -3\ \ ;;\ \ \underline{x = -1}$

Los vectores pedidos pueden ser:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{u} = (1,\ 2,\ -1)\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = (k,\ 2k\ \ -k)}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Representar gráficamente la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$, determinando los intervalos donde es creciente.

Para representar gráficamente la función vamos a estudiar los siguientes puntos:

I) Dominio: $f(x) = 2x + (2x)^{-1} = 2x + \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 + 1}{2x} \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

II) Corte con los ejes:

Eje X $\Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$;; $x \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje X.

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} = \infty \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje Y.

III) Simetrías:

Con respecto al eje Y $\Rightarrow$ No es una función par. No es simétrica a Y.

Con respecto al origen $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Es simétrica con respecto al origen.

IV) Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{8x \cdot 2x - 2(4x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2 - 2}{4x^2} = \underline{\frac{4x^2 - 1}{2x^2} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 0 \ ;; \ 4x^2 - 1 = 0 \ ;; \ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = \frac{1}{2}} \\ \underline{x_2 = -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \ |x| > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow Creciente \ \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{Para \ |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow Decreciente \ \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)}}$$

V) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x)=\frac{8x\cdot 2x^2-4x\cdot\left(4x^2-1\right)}{4x^4}=\frac{4x^2-4x^2+1}{x^3}=\underline{\frac{1}{x^3}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8>0\Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x=\frac{1}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4\cdot\frac{1}{4}+1}{1}=\frac{1+1}{1}=2\;\Rightarrow\; \textit{Máximo relativo}\Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)}}$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow$ *Mínimo relativo* $\Rightarrow \underline{\underline{Q\left(-\frac{1}{2},\ -2\right)}}$

VI) <u>Concavidad y convexidad:</u>

$$f''(x)=\frac{1}{x^3}\;\Rightarrow\begin{cases} x>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow \underline{\underline{\textit{Convexidad } (\cup)\Rightarrow(0,\ +\infty)}} \\ \\ x<0\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow \underline{\underline{\textit{Concavidad } (\cap)\Rightarrow(-\infty,\ 0)}} \end{cases}$$

VII) <u>Puntos de inflexión</u>: $f''(x)=\frac{1}{x^3}=0\;\Rightarrow\; x\notin R\;\Rightarrow$ <u>No tiene puntos de inflexión.</u>

VIII) <u>Asíntotas:</u>

Paralelas a X: $y=k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{2x}=\infty\Rightarrow \underline{\textit{No tiene}}$.

Paralelas a Y: $2x=0\;\rightarrow\;\underline{x=0}$

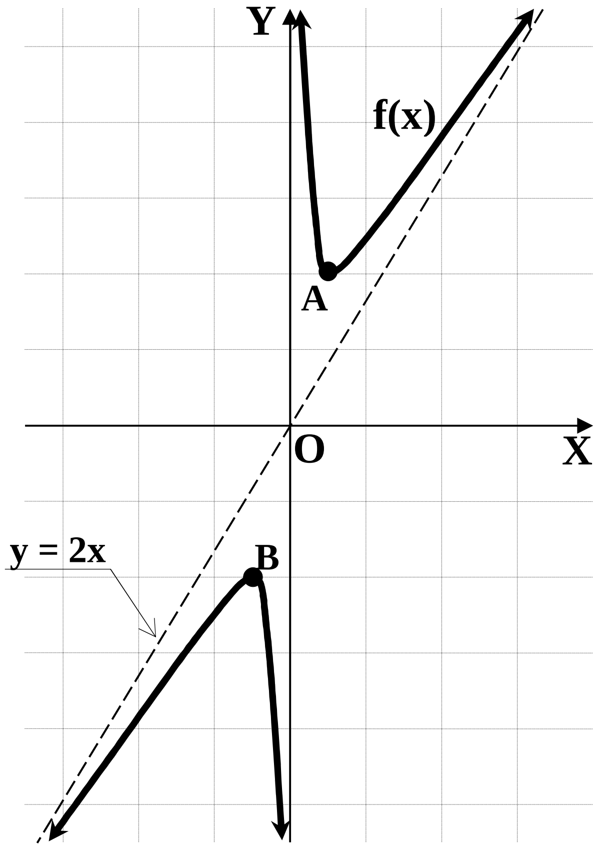
Oblicuas: Son de la forma y = mx + n.

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+1}{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{2x^2}=2=m \\ \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{2x^2}=0=n \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{y=2x}$$

IX) <u>Tabla de valores</u>:

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
F(x)	2	-2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$	$-\frac{17}{4}$
	Máx.	Mín.				

X) Representación gráfica:



****

2º) Calcular la matriz X tal que A · X = B, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sea la matriz pedida $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=2 \\ \underline{c=3} \\ \underline{d=4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \underline{a=-5} \\ \underline{b=-6} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Otra forma de hacer este ejercicio es mediante la matriz inversa de A:

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} en A · X = B, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot B \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot B} \qquad (*)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \;;;\; Adj.\ de\ A^T = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-8 \\ 0+3 & 0+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}} = X$$

****

3º) Calcular el valor de la integral $I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot dx$.

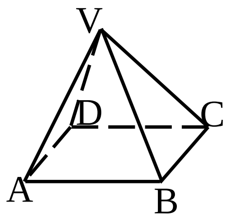
$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x = u \rightarrow dx = du \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; I = \left[x \cdot \left(-e^{-x} \right) - \int -e^{-x} \cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx \right]_0^1 = \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = \left[-e^{-x} (x+1) \right]_0^1 = -e^{-1} (1+1) - \left[-e^{0} (0+1) \right] =$$

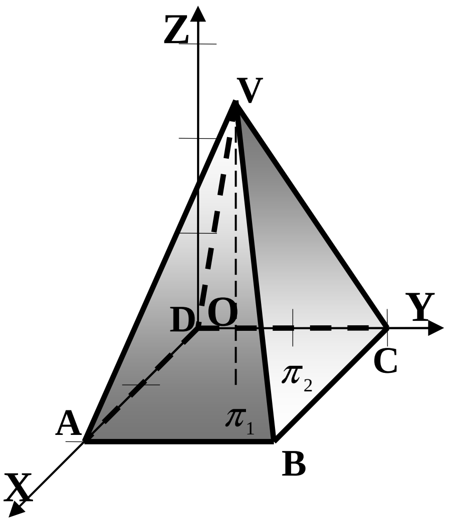
$$= -2e^{-1} - (-1 \cdot 1) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \underline{\underline{\frac{e-2}{e}\; u^2 = I}}$$

****

4º) La base de una pirámide es un cuadrado ABCD de 2 metros de lado y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.



Situando la pirámide en unos ejes coordenados, de tal manera que uno la base coincida con el plano z = 0 y uno de sus vértices con el origen de coordenadas, tal como se indica en la gráfica siguiente.



Las coordenadas de los diferentes puntos son las siguientes:

A(2, 0, 0); B(2, 2, 0); C(0, 2, 0); D(0, 0, 0) y el vértice es V(1, 1, 3).

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (1,\ 1,\ 3) - (2,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 3) = \overrightarrow{AV}$$

$$\overrightarrow{BV} = V - B = (1,\ 1,\ 3) - (2,\ 2,\ 0) = (-1,\ -1,\ 3) = \overrightarrow{BV}$$

$$\overrightarrow{CV} = V - C = (1,\ 1,\ 3) - (0,\ 2,\ 0) = (1,\ -1,\ 3) = \overrightarrow{CV}$$

El plano π_1, determinado por los puntos ABV, se puede expresar en función de los vectores $\overrightarrow{AV}\ \ y\ \ \overrightarrow{BV}$ y el vértice V:

$$\pi_1\left(V,\ \overrightarrow{AV},\ \overrightarrow{BV}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;$$

$$3(x-1) + (z-1) - 3(y-1) + (z-1) + 3(x-1) + 3(y-1) = 0\ \ ;;\ \ 6(x-1) + 2(z-1) = 0\ \ ;;$$

$$3x - 3 + z - 1 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\pi_1 \equiv 3x + z - 4 = 0}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\overrightarrow{n_1} = (3,\ 0,\ 1)}$$

El plano π_2, determinado por los puntos BCV, se puede expresar en función de los vectores $\overrightarrow{BV}\ \ y\ \ \overrightarrow{CV}$ y el vértice V:

$$\pi_2\left(V,\ \overrightarrow{BV},\ \overrightarrow{CV}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;$$

$$-3(x-1) + (z-1) + 3(y-1) + (z-1) + 3(x-1) + 3(y-1) = 0\ \ ;;\ \ 6(y-1) + 2(z-1) = 0\ \ ;;$$

$$3y - 3 + z - 1 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\pi_1 \equiv 3y + z - 4 = 0}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\overrightarrow{n_2} = (0,\ 3,\ 1)}$$

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son unos vectores normales de los planos π_1 y π_2, respectivamente.

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$.

Teniendo en cuenta que, aplicando el producto escalar de dos vectores que:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{(3,\ 0,\ 1) \cdot (0,\ 3,\ 1)}{\sqrt{3^2+0^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+3^2+1^2}} = \frac{0+0+1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10} = 0'1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 84^\circ\ 15'\ 39''}}$$

****