PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Para representar gráficamente la función vamos a estudiar los siguientes puntos:

I) Dominio: $f(x) = x^3 + x^{-3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3} \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

II) Corte con los ejes:

Eje X $\Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x^6 + 1 = 0$;; $x \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje X.

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} = \infty \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje Y.

III) Simetrías:

Con respecto al eje Y $\Rightarrow$ No es una función par. No es simétrica a Y.

Con respecto al origen $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Es simétrica con respecto al origen.

IV) Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{6x^5 \cdot x^3 - (x^6+1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^6 - 3x^6 - 3}{x^4} = \frac{3x^6 - 3}{x^4} = \underline{\frac{3(x^6-1)}{x^4} = f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3\left(x^6-1\right)}{x^4}=0 \;\;;;\;\; x^6-1=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1=1} \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ |x|>1 \;\Rightarrow\; f'(x)>0 \;\Rightarrow\; Creciente\ \ (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ |x|<1 \;\Rightarrow\; f'(x)<0 \;\Rightarrow\; Decreciente\ \ (-1,\ 0)\cup(0,\ 1)}}$$

V) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x)=\frac{18x^5\cdot x^4-3\left(x^6-1\right)\cdot 4x^3}{x^8}=\frac{18x^6-12x^6+12}{x^5}=\frac{6x^6+12}{x^5}=\underline{\frac{6\left(x^6+2\right)}{x^5}=f''(x)}$$

$$f''(1)=\frac{6(1+2)}{1^5}=\frac{18}{1}=18>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=1}.$$

$$f(1)=\frac{1^6+1}{1^3}=\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}=2 \;\Rightarrow\; Máximo\ \ relativo \Rightarrow \underline{\underline{P(1,\ 2)}}$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow$ $Mínimo\ \ relativo \Rightarrow \underline{\underline{Q(-,\ -2)}}$

VI) Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\frac{6\left(x^6+2\right)}{x^5} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexidad\ \ (\cup) \Rightarrow (0,\ +\infty)}} \\ \\ x<0 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Concavidad\ \ (\cap) \Rightarrow (-\infty,\ 0)}} \end{cases}$$

VII) Puntos de inflexión: $f''(x)=\frac{6\left(x^6+2\right)}{x^5}=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

VIII) Asíntotas:

Paralelas a X: $y=k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+1}{x^3}=\infty \Rightarrow \underline{No\ \ tiene}$.

Paralelas a Y: $x^5=0 \;\rightarrow\; \underline{x=0}$

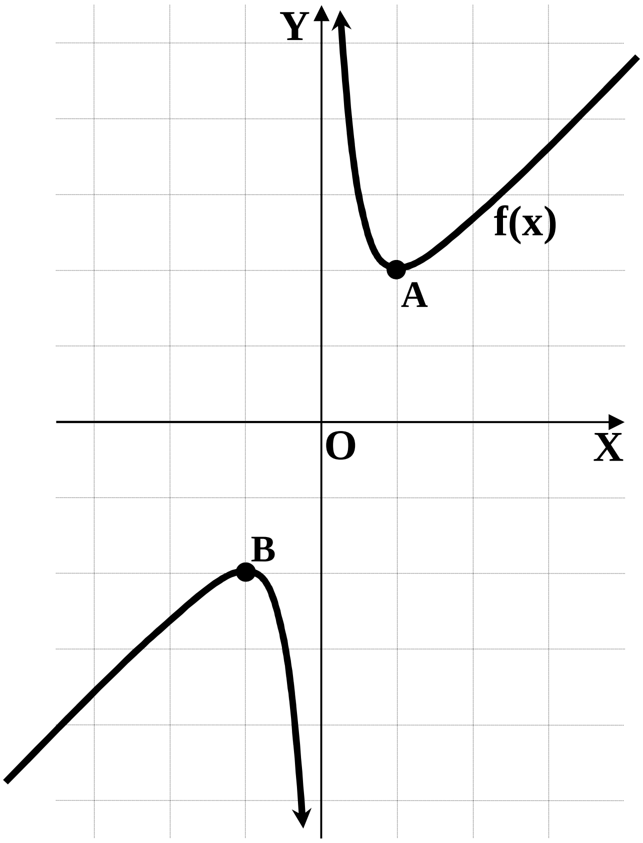
Oblicuas: Son de la forma y = mx + n.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^6+1}{x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+1}{x^4}=\infty \Rightarrow \underline{No\ \ tiene}$$

IX) Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	· · · ·
f(x)	2	-2	$\frac{65}{8}$	$-\frac{65}{8}$	· · · · ·
	Máx.	Mín.			

X) Representación gráfica:



****

2º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado, en la región donde la ordenada de x es positiva, por la recta x = 1, la hipérbola x · y = 1, y la recta 6y – x + 1 = 0. Calcular su área.

Los puntos de corte de la hipérbola con las rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\cdot y=1 \;\;;;\;\; y=1 \;\Rightarrow\; \underline{A(1,\ 1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6y-x+1=0 \\ x\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{x} \;\;;;\;\; \frac{6}{x}-x+1=0 \;\;;;\;\; 6-x^2+x=0 \;\;;;\;\; x^2-x-6=0 \;\;;;$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=3 \;\;;;\;\; y_1=\frac{1}{3} \;\rightarrow\; \underline{B\left(3,\ \frac{1}{3}\right)} \\ \\ x_2=-2 \;\;;;\;\; y_2=-\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \underline{C\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)} \end{array}\right.$$

3º) La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es la siguiente: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz sean nulos.

4º) Determinar si el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z = 1$ es perpendicular a la recta t cuyas ecuaciones son $t \equiv \begin{cases} -x = 3y + 3z \\ y + 2z = -1 \end{cases}$. Determinar también si es paralelo a la recta r que pasa por los puntos A(1, -1, 1) y B(-1, -1, 0).

****

REPERTORIO B

1º) Enunciar la Regla de L´Hopital y calcula el siguiente límite: $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$.

2º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ay + az = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{array}\right\}$ según los valores del parámetro a.

3º) Calcular el área del cuadrilátero de vértices A(1, 0, 1), B(2, 0, 2), C(1, 2, 1) y $D(3,\ 1,\ 3)$.

4º) Calcular una primitiva de la función $f(x) = (x^2+1)^{-1} \cdot x$ que se anule para x = 2.

****