PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Lea cuidadosamente las dos opciones del examen.
Elija una de ellas y conteste a las cuatro cuestiones que figuran en ella.
No conteste a cuestiones correspondientes a diferentes opciones: ello anulará el examen.

REPERTORIO A

1º) Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre puntos.

Se define el producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$ al número real resultante de multiplicar los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman, y se expresa de la siguiente forma:

$$\underline{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha}$$

De la definición de producto escalar se deduce la relación con el ángulo que forman los vectores, ya que:

$$\underline{\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}}\ .$$

Dados dos puntos diferentes A y B, su distancia es igual al módulo del vector que determinan, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Al ser los puntos diferentes, es vector no es nulo. Su módulo puede obtenerse multiplicando escalarmente el vector por si mismo:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \cos 0^{o} = \left|\overrightarrow{u}\right|^{2} \cdot 1 = \left|\overrightarrow{u}\right|^{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{d = \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}}$$

****

2º) Representar la gráfica de la función $f(x)=2x^3+3x^2-0'2$.

Por las características de la función, estudiaremos los siguientes apartados:

a) Dominio: Se trata de una función polinómica, por lo tanto: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$

b) Simetrías: No tiene simetrías, ni con respecto a Y, ni con respecto al origen.

c) Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1) \;;;\; f'(x)=0 \Rightarrow 6x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}$$

$$Por\;\; ejemplo: \;\; f'(1)=6\cdot 2=12>0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{Creciente: \; (-\infty,\,-1)\cup(0,\,\infty)}} \\ \\ \underline{\underline{Decreciente: \; (-1,\,0)}} \end{cases}$$

d) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x)=12x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''_{(0)}=6>0 \Rightarrow \underline{Mínimo} \\ \\ y''_{(-1)}=-12+6=-6<0 \Rightarrow \underline{Máximo} \end{cases}$$

$$f(0)=0'2=\frac{1}{5} \Rightarrow \underline{\underline{Mín \Rightarrow \left(0,\,\frac{1}{5}\right)}} \;;;\; f(-1)=-2+3-\frac{1}{5}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow \underline{\underline{Máx \Rightarrow \left(-1,\,\frac{4}{5}\right)}}$$

e) Concavidad y convexidad.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 12x+6=0 \;;;\; x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow (\cap)\; \underline{\underline{Cóncava: \left(-\infty,\,-\frac{1}{2}\right)}} \\ \\ x>-\frac{1}{2} \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow (\cup)\; \underline{\underline{Convexa: \left(-\frac{1}{2},\,\infty\right)}} \end{cases}$$

f) Puntos de inflexión.

$f'''(x)=6\neq 0 \Rightarrow$ Existe un punto de inflexión para $x=-\frac{1}{2}$, valor que anula $f''(x)$:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P.\,I.\left(-\frac{1}{2},\,\frac{3}{10}\right)}}$$

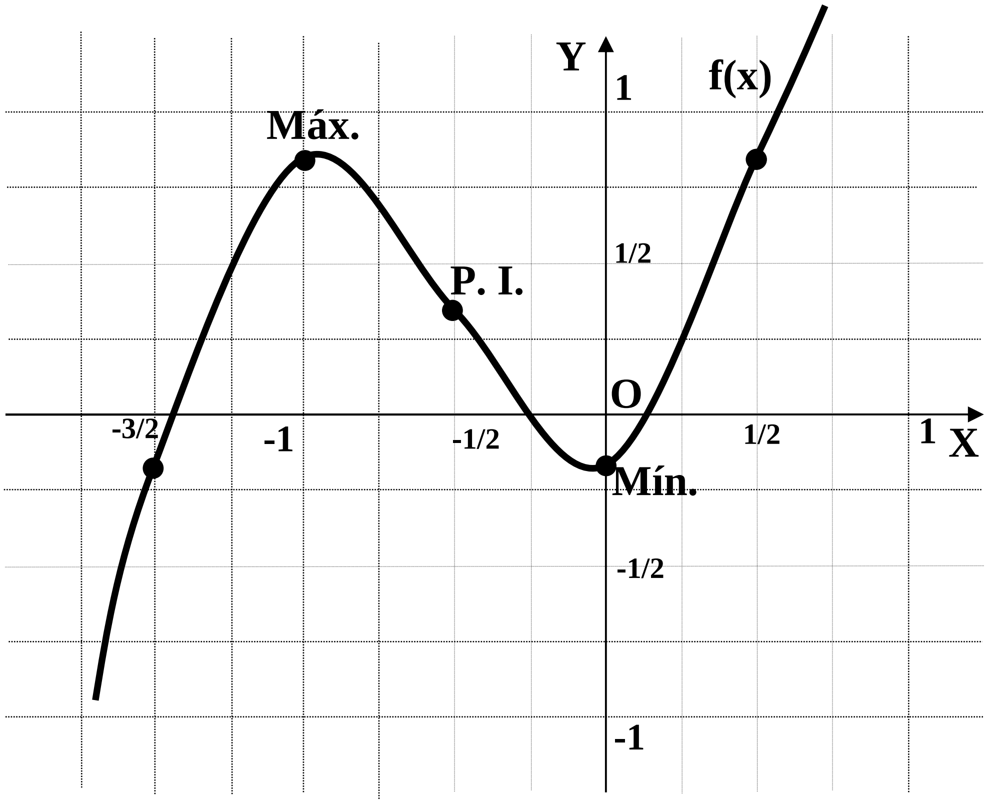
g) Asíntotas:

Por tratarse de una función polinómica no tiene asíntotas.

h) Tabla de valores:

x	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	-2	.....
y	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{21}{5}$	.....
	P. I.	Mín.	Máx			

i) Representación gráfica:



****

3º) Calcular alguna recta r que sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv x-2y+z-1=0$ y que también sea paralela al plano que pasa por A(2, 0, 1), B(0, 2, 1) y C(1, -1, 0).

La ecuación general del plano α que pasa por los puntos A, B y C se obtiene del modo siguiente:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 2,\ 1)-(2,\ 0,\ 1)=(-2,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(1,\ -1,\ 0)-(2,\ 0,\ 1)=(-1,\ -1,\ -1).$$

$$\alpha(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x-2)+2(z-1)+2(z-1)-2y=0\ ;;$$

$$-2x+4+4z-4-2y=0\ ;;\ -2x-2y+4z=0\ ;;\ \underline{\alpha\equiv x+y-2z=0}$$

La recta s, intersección de los planos π y α es: $\underline{s\equiv\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}}$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2y=1-\lambda \\ x+y=2\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x+2y=-1+\lambda \\ x+y=2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y=-1+3\lambda\ ;;$$

$$\underline{y=-\frac{1}{3}+\lambda}\ ;;\ x+y=2\lambda\ ;;\ x-\frac{1}{3}+\lambda=2\lambda\ ;;\ \underline{x=\frac{1}{3}+\lambda}\Rightarrow \underline{s\equiv\begin{cases} x=\frac{1}{3}+\lambda \\ y=-\frac{1}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Todas las rectas paralelas a s tienen como vector director $\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ 1)$.

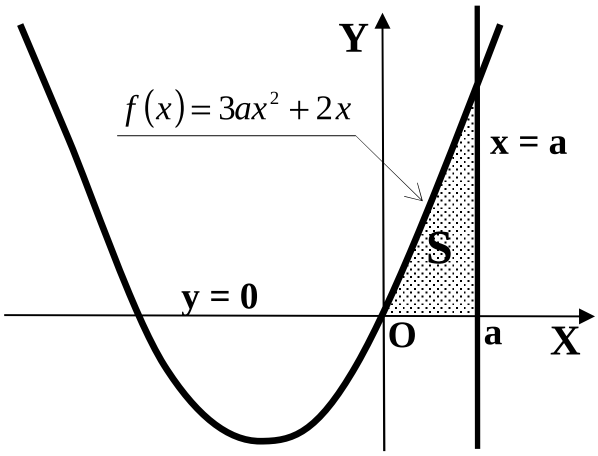
La recta pedida r, es paralela a s, por tanto, basta con tomar un punto cualquiera que no pertenezca a ninguno de los planos π y α, por ejemplo: P(1, 2, 3).

$$r(P,\ \overrightarrow{w})\Rightarrow \underline{\underline{r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Determinar una constante positiva a, sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta y = 0 y la recta x = a tiene de área $S = (a^2 - 1)^2$.

La representación gráfica, aproximada, de la parábola es la que indica la figura.



$$S = \int_0^a f(x) \cdot dx = (a^2 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^a (3ax^2 + 2x) \cdot dx = \left[\frac{3ax^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^a =$$

$$= \left[ax^3 + x^2 \right]_0^a = (a \cdot a^3 + a^2) - 0 =$$

$$= a^4 + a^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 \;\;;;$$

$$a^2 = -2a^2 + 1 \;\;;;\;\; 3a^2 = 1 \;\;;;\;\; a^2 = \frac{1}{3} \;\;;;\;\; a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow (a > 0) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ax-ay+az=a \\ (3-2a)z=1 \\ x+(a-1)y=0 \end{array}\right\}$, según el valor de a.

El sistema es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ (3-2a)z=1 \\ x+(a-1)y=0 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}=(3-2a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}=(3-2a)\cdot(a-1+1)=a(3-2a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=0} \\ \underline{a_2=\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$Para\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ \underline{a=0}\ es\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-C_2\} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1-3+1=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=3}$$

$$Para\ a=\frac{3}{2}\ es\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=3}$$

$$Para \left.\begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango \ \ M \neq Rango \ \ M' \ \Rightarrow \ Incompatible$$

****

2º) Calcular el valor de $\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx$.

$$I = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x\,dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{c} x = 1 \rightarrow t = -1 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-1} e^t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \left[e^t\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{-1} - e^0\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-e}{e} =$$

$$= \frac{e-1}{2e}\, u^2 = I$$

****

3º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = sen\ x + \cos x$, calcular la derivada en $x = 0$ de las funciones $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

$$f[g(x)] = f(sen\ x + \cos x) = (sen\ x + \cos x)^2 + \pi = sen^2\ x + 2\, sen\ x \cdot \cos x + \cos^2 x + \pi =$$

$$= 1 + sen\ (2x) + \pi = \underline{sen\ (2x) + \pi = f[g(x)]}$$

$$\underline{f'[g(x)] = 2 \cdot \cos(2x)} \quad \Rightarrow \quad Para\ \ x = 0 \quad \Rightarrow \quad f'[g(0)] = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2 = f'[g(0)]}}$$

$$g[f(x)] = g(x^2 + \pi) = \underline{sen\ (x^2 + \pi) + \cos(x^2 + \pi) = g[f(x)]}$$

$$g'[f(x)] = 2x \cdot \cos(x^2 + \pi) - 2x \cdot sen\ (x^2 + \pi) = \underline{2x[\cos(x^2 + \pi) - sen\ (x^2 + \pi)] = g'[f(x)]}$$

$$Para\ \ x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g'[f(x)] = 0}}$$

****

4º) Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 2)$ y $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 0)$.

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ambos, el vector $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + 4j - 2i = -2i + 4j + k = \underline{\underline{(-2,\ 4,\ 1) = \overrightarrow{z}}}$$

El vector pedido es un vector unitario de la misma dirección que $\overrightarrow{z}$, que se llama versor de $\overrightarrow{z}$, y puede haber dos, que son opuestos y se obtienen teniendo en cuenta que un vector dividido por su módulo resulta un versor del vector; son los siguientes:

$$\pm \frac{(-2,\ 4,\ 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{(-2,\ 4,\ 1)}{\sqrt{21}} \Rightarrow \quad Soluciones:$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{z_1} = \left(\frac{-2}{21},\ \frac{4}{\sqrt{21}},\ \frac{1}{\sqrt{21}} \right)}} \quad y \quad \underline{\underline{\overrightarrow{z_2} = \left(\frac{2}{21},\ \frac{-4}{\sqrt{21}},\ \frac{.1}{\sqrt{21}} \right)}}$$

****