PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no puedan sumarse ni multiplicarse.

Suma:

Dadas dos matrices A y B, de la misma dimensión m x n, la matriz suma A + B es otra matriz de dimensión m x n, que se obtiene sumando los elementos de las matrices A y B que ocupan la misma posición.

Siendo $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$;; $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}}$

La suma de matrices tiene las siguientes propiedades:

Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C)

Elemento neutro: A + O = O + A = A

Elemento opuesto: A + (-A) = (-A) + A = O

Conmutativa: A + B = B + A

Producto:

Sean las matrices A y B. Para que pueda efectuarse su producto sus dimensiones tienen que ser las siguientes: A, m x k ; B, k x n. Es decir: para que dos matrices puedan multiplicarse es necesario que: <u>el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.</u> La dimensión de la matriz producto P es m x n.

Para explicar el proceso de la multiplicación de dos matrices, supongamos el producto de una matriz fila F, 1 x n, por otra matriz columna, C, n x 1. El producto sería:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \ \cdots + f_n c_n$$

Supongamos ahora las matrices A, de dimensión m x k, a cuyas filas llamaremos de la forma $F_1, F_2\ , \cdots, F_m$ y B, de dimensión n x k, a cuyas columnas llamaremos de la forma $C_1, C_2\ , \cdots, C_n$.

La matriz producto A · C se expresa de la forma:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & \cdots & F_1 \cdot C_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_m \cdot C_1 & \cdots & F_m \cdot C_n \end{pmatrix}}}$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

Asociativa: (A · B) · C = A · (B · C)

Distributiva por la derecha y por la izquierda de la multiplicación con respecto a la suma:

A · (B + C) = A · B + A · C

(A + B) · C = A · C + B · C

En el caso particular de matrices cuadradas, existe el elemento neutro, I, tal que:

A · I = I · A = A

En general, tratándose de matrices cuadradas, no se cumple la propiedad conmutativa.

****

2º) Representar gráficamente la función $f(x)=2x^3-x^2-x+\frac{5}{27}$. ¿Cuántas raíces reales positivas tiene este polinomio?

----

a) Dominio: Se trata de una función polinómica, por lo tanto: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$

b) Corte con los ejes:

$$Eje\ X\ \rightarrow y=0\Rightarrow 2x^3-x^2-x+\frac{5}{27}=0\ ;;\ 54x^3-27x^2-27x+5=0$$

Resolviendo por Ruffini, teniendo en cuenta que las posibles raíces fraccionarias son las que tienen como numerador los divisores del término independiente y por denominador los divisores del coeficiente de mayor grado:

	54	-27	-27	5
1/6		9	-3	-5
	54	-18	-30	0

$$\Rightarrow \underline{x_1=\frac{1}{6}}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$54x^2-18x-30=0\ ;;\ 9x^2-3x-5=0\ ;;\ x=\frac{3\pm\sqrt{9+180}}{18}=\frac{3\pm 13}{18}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_2=\frac{8}{9}}\\ \underline{x_3=-\frac{5}{9}}\end{cases}$$

Los puntos de corte con OX son: $\underline{P_1\left(\frac{1}{6},\ 0\right)}$; $\underline{P_2\left(\frac{8}{9},\ 0\right)}$; $\underline{P_3\left(-\frac{5}{9},\ 0\right)}$

Eje Y: $x=0\Rightarrow P_4\left(0,\ \frac{5}{27}\right)$

c) Simetrías: No tiene simetrías, ni con respecto a Y, ni con respecto al origen.

d) Crecimiento y decrecimiento.

$$y'=6x^2-x-1\ ;;\ y'=0\Rightarrow 6x^2-x-1=0\ ;;\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=\frac{1}{2}}\\ \underline{x_2=-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

$$y'=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\quad Por\ \ ejemplo:\ y'(0)<0\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{Creciente:\ \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)}}\\ \underline{\underline{Decreciente:\ \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)}}\end{cases}$$

e) Máximos y mínimos relativos:

$$y' = 6x^2 - x - 1 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \;\; ;; \;\; x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y'' = 12x - 1 \Rightarrow \begin{cases} y''_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}} \\ y''_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo}} \end{cases}$$

$$y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{27} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{27} = \frac{10-27}{54} = -\frac{17}{54} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mín} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{54}\right)}}$$

$$y_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + \frac{5}{27} = -\frac{2}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{27} = \frac{3-3+9}{27} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mín} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}}$$

f) Concavidad y convexidad.

$$y'' = 12x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{12}} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{12} \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow \underline{\underline{(\cup)\ \textit{Convexa}: \left(\frac{1}{12}, \infty\right)}} \\ x < \frac{1}{12} \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow \underline{\underline{(\cap)\ \textit{Cóncava}: \left(-\infty, \frac{1}{12}\right)}} \end{cases}$$

g) Puntos de inflexión.

$y''' = 12 \neq 0 \Rightarrow$ Existe un punto de inflexión para el valor que anula la segunda derivada:

$$y_{\left(\frac{1}{12}\right)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{5}{27} = \frac{1}{864} - \frac{1}{144} - \frac{1}{12} + \frac{5}{27} = \frac{1-6-72+32}{864} = -\frac{45}{864} = -\frac{5}{96}$$

$$\underline{\underline{P.\ I.\left(\frac{1}{12}, -\frac{5}{96}\right)}}$$

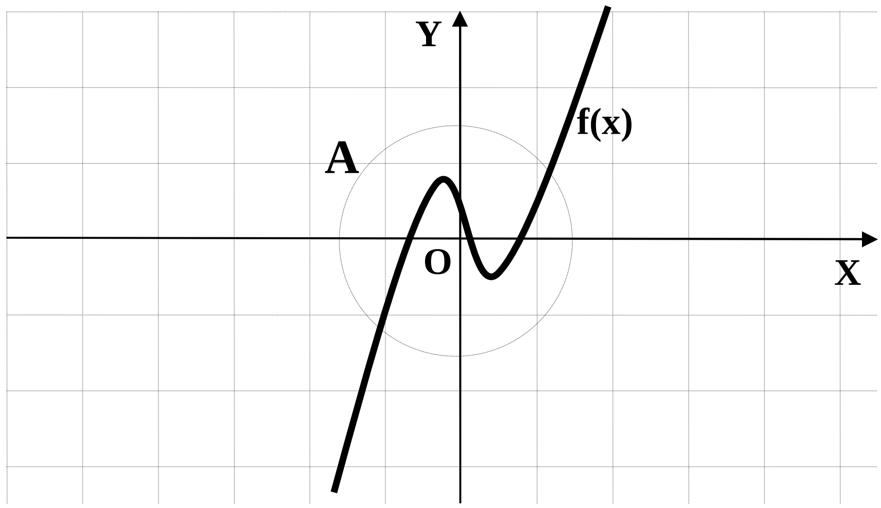
h) Asíntotas:

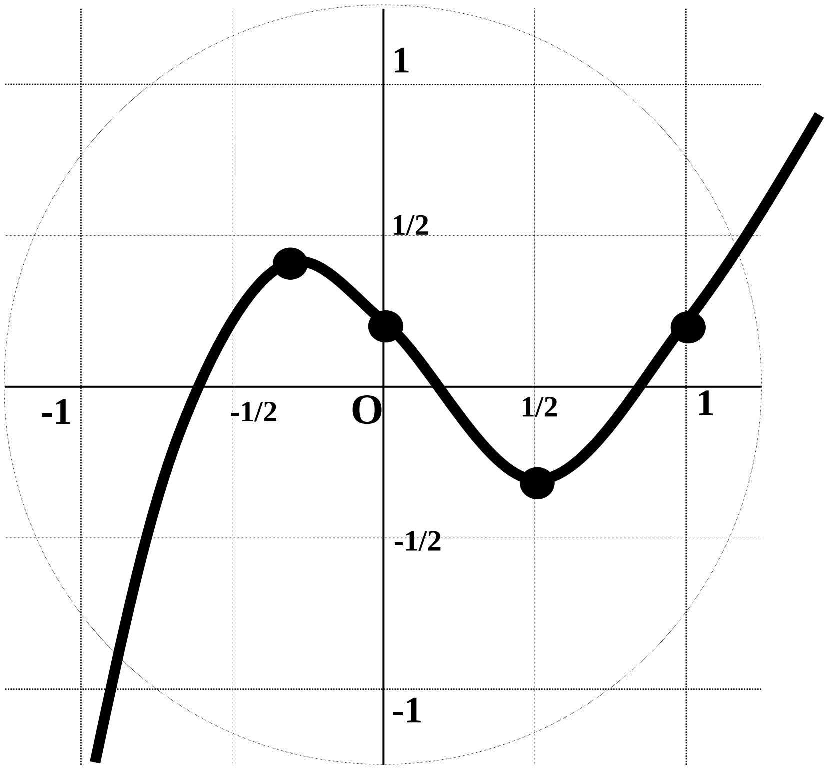
Por tratarse de una función polinómica no tiene asíntotas.

i) Tabla de valores:

x	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	1	.....
y	$-\frac{5}{96}$	$-\frac{17}{54}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	.....
	P. I.	Mín.	Máx						

j) Representación gráfica:





Detalle A

****

3º) Determinar una función f(x) cuya segunda derivada sea $f''(x)=xe^x$.

$$f'(x)=\int f''(x)\cdot dx=\int x\cdot e^x\ \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=u \rightarrow du=dx \\ e^x\cdot dx=dv \rightarrow v=e^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=x\cdot e^x-\int e^x\ \cdot dx=x\cdot e^x-e^x+C=\underline{e^x(x-1)+C=f'(x)}$$

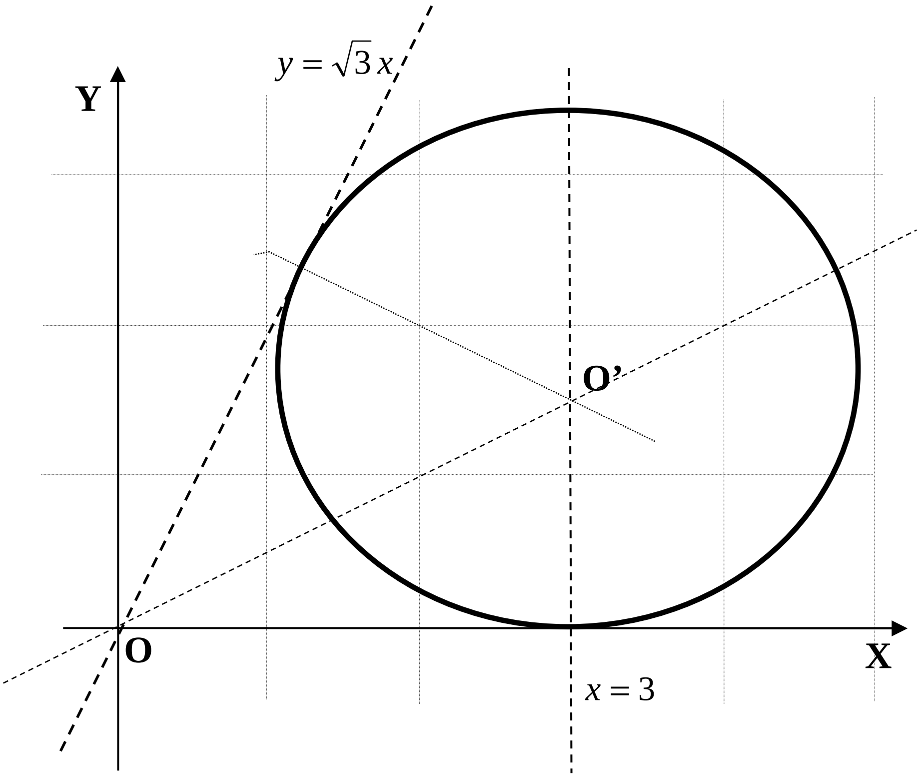
$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int e^x(x-1)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=u \rightarrow du=dx \\ e^x\cdot dx=dv \rightarrow v=e^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot e^x-\int e^x\ \cdot dx=(x-1)\cdot e^x-e^x+C=\underline{\underline{(x-2)\cdot e^x+C=f(x)}}$$

****

4º) Hallar la ecuación de una circunferencia que, siendo tangente a la recta $y = \sqrt{3}\,x$, sea tangente al eje de abscisas en el punto P(3, 0). $\left(Indicación: tag\ 30º = \sqrt{3};\ tag\ 60º = \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

Para una mejor comprensión del problema, a continuación hacemos una representación real de una de las situaciones:



Para determinar el centro de la circunferencia deberemos tener en cuenta que es el punto de corte de la bisectriz del ángulo que forman el eje X (recta y = 0) con la recta dada $\sqrt{3}\,x - y = 0$:

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}\,x - y}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{\sqrt{3}\,x - y}{\sqrt{3+1}} = \pm \frac{\sqrt{3}\,x - y}{2} = y \ ;;\ 2y = \pm\left(\sqrt{3}\,x - y\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Signo + \rightarrow 2y = \sqrt{3}\,x - y \ ;;\ 3y = \sqrt{3}\,x \ ;;\ \underline{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x} \\ \\ Signo - \rightarrow 2y = -\sqrt{3}\,x + y \ ;;\ \underline{y = -\sqrt{3}\,x} \end{cases}$$

Como es fácil comprender, existen dos soluciones; una es la indicada en la figura y la otra sería la circunferencia cuyo centro es la intersección de la recta x = 3 con la bisectriz de pendiente negativa, que daría lugar a una circunferencia situada en el cuarto cuadrante. A continuación determinamos ambas circunferencias.

Para la recta $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x. \Rightarrow \quad x=3 \Rightarrow \underline{O'\left(3,\ \sqrt{3}\right)} \Rightarrow \begin{cases} A=-2a=\underline{-6} \\ B=-2b=\underline{-2\sqrt{3}} \\ \underline{r=\sqrt{3}} \end{cases}.$

$C=a^2+b^2-r^2=9+3-3=\underline{9=C}$

$$\underline{\underline{c_1 \equiv x^2+y^2-6x-2\sqrt{3}\,y+9=0}}$$

Para la recta $y=-\sqrt{3}\,x. \Rightarrow \quad x=3 \Rightarrow \underline{O'\left(3,\ -3\sqrt{3}\right)} \Rightarrow \begin{cases} A=-2a=\underline{-6} \\ B=-2b=\underline{-6\sqrt{3}} \\ \underline{r=3\sqrt{3}} \end{cases}.$

$C=a^2+b^2-r^2=(-6)^2+\left(-6\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2=36+108-27=\underline{118=C}$

$$\underline{\underline{c_2 \equiv x^2+y^2-6x-6\sqrt{3}\,y+118=0}}$$

<u>Nota:</u> No hemos tenido en cuenta la observación porque solamente valía para la primera de las soluciones obtenidas.

****

REPERTORIO B

1º) Calcular la derivada en el punto x = 1 de la función $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot Lx$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} \cdot Lx + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot Lx + x^{-\frac{3}{2}} = -x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{Lx}{2} + 1\right) = -\sqrt{x^3}\left(\frac{Lx+2}{2}\right) =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{x\sqrt{x}}{2}(Lx+2) = f'(x)}}$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1\sqrt{1}}{2}(L1+2) = -\frac{1}{2} \cdot (0+2) = \underline{\underline{-1 = f'(1)}}$$

****

2º) Discutir el sistema $\left.\begin{cases}(a-3)x+4y=2\\ x-2z=-1\\ -x+ay+2z=a\end{cases}\right\}$ según el valor del parámetro a.

$$M=\begin{pmatrix}a-3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & a & 2\end{pmatrix}\ ;;\ M'=\begin{pmatrix}a-3 & 4 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & a & 2 & a\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}a-3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & a & 2\end{vmatrix}=8+2a(a-3)-8=2a(a-3)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{a_1=0}\\ \underline{a_2=3}\end{array}\right\}$$

$$Para\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\ a\neq 3\end{array}\right\}\Rightarrow\ Rango\,M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \det er\min ado}}$$

$Para\ \ a=0\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$\left\{M'\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0\ \Rightarrow\ Rango=3\right\}\Rightarrow\underline{a=0\ \Rightarrow\ Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \ a=0\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Incompatible}}$$

$Para\ \ a=3\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$\left\{M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=6+4-12\neq 0\Rightarrow Rango\ \ M'=3\right\}\Rightarrow\underline{a=3\Rightarrow Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \ a=3\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Incompatible}}$$

****

3º) Calcular, con el cambio de variable $t^2 = x+3$, el valor de $I = \int_1^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$.

$$I = \int_1^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t^2 = x+3 \;;;\; x = t^2 - 3 \\ 2t \cdot dt = dx \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} x = 6 \to t = 3 \\ x = 1 \to t = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_2^3 \frac{(t^2-3)\cdot 2t \cdot dt}{t} =$$

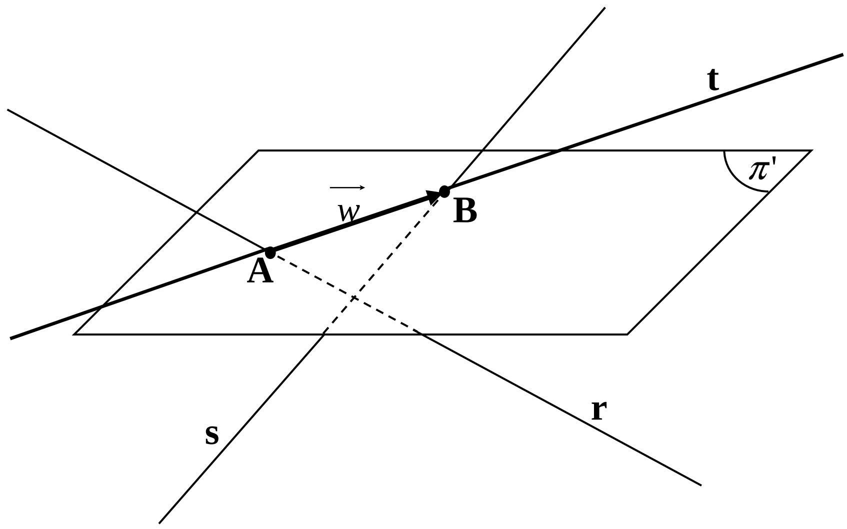
$$= 2 \cdot \int_2^3 (t^2-3)\cdot dt = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} - 3t \right]_2^3 = 2 \cdot \left[\left(\frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2 \right) \right] = 2 \cdot \left[(9-9) - \left(\frac{8}{3} - 6 \right) \right] =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{8}{3} + 6 \right] = 2 \cdot \frac{-8+18}{3} = 2 \cdot \frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}} = I$$

****

4º) Determinar una recta t que sea paralela al plano $\pi \equiv x+y+z=3$, que corte a la recta r de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, y que también corte a la recta s de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$.

Para una mejor comprensión del problema, hacemos un esquema de la situación.



Este problema, por ser las rectas r y s secantes al plano π, lo serán a todos los infinitos planos posibles paralelos a π, lo cual significa que tiene infinitas soluciones.

Por ejemplo, consideremos el plano $\pi' \equiv x+y+z=1$.

A es la intersección de r y π: $\Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi \\ r \end{matrix} \right\} \Rightarrow y=1 \Rightarrow \underline{A(0, 1, 0)}$

B es la intersección de s y π: $\Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi \\ s \end{matrix} \right\} \Rightarrow x+0+1=1 ;;\ x=0 \Rightarrow \underline{B(0, 0, 1)}$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B-A = (0,\ 0,\ 1)-(0,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 1)$.

La recta pedida t, es la que pasa por A y tiene como vector director $\overrightarrow{w}$:

$$\underline{\underline{t \equiv (x,\ y,\ z) = (0, 1, 0) + k \cdot (0, -1, 1)}} \quad \text{o} \quad \underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1-k \\ z=k \end{cases}}}$$

****