PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. Es estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección des examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

1º) Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30.000 euros y la factoría B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20.000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

Sean x e y los días que trabajan las fábricas A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 6x+2y \geq 180 \\ 2x+2y \geq 140 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+y \geq 90 \\ x+y \geq 70 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$1 \Rightarrow 3x+y \geq 90 \Rightarrow y \geq 90-3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	30
y	90	0

$2 \Rightarrow x+y \geq 70 \Rightarrow y \geq 70-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

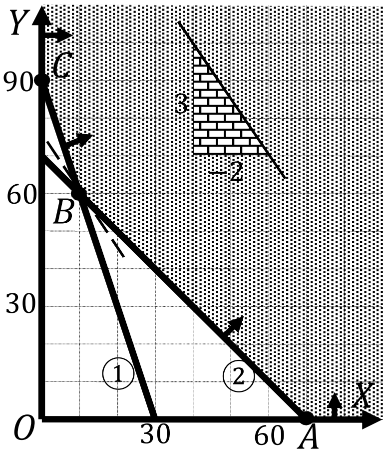
x	0	70
y	70	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=70 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(70,0).$$

$$B \Rightarrow \begin{rmatrix} 3x + y = 90 \\ x + y = 70 \end{rmatrix}\!\!\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3x + y = 90 \\ -x - y = -70 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 20;\;\; x = 10 \Rightarrow B(10, 60).$$



$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ 3x + y = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(0, 90).$$

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x, y) = 30.000x + 20.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(70, 0) = 30.000 \cdot 70 + 20.000 \cdot 0 = 2.100.000.$

$B \Rightarrow f(10, 60) = 30.000 \cdot 10 + 20.000 \cdot 60 = 300.000 + 1.200.000 =$

$= 1.500.000.$

$C \Rightarrow f(0, 90) = 30.000 \cdot 0 + 20.000 \cdot 90 = 1.800.000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(10, 60)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 30.000x + 20.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30.000}{20.000}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ si\ la\ fábrica\ A\ trabaja\ 10\ días\ y\ la\ B, 60\ días.}$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.500.000\ euros.}$

****

2º) Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada bote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Sean x e y los lotes de los tipos A y B que elabora el apicultor, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y \leq 900 \\ 2x+y \leq 500 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 2x+3y \leq 900 \Rightarrow y \leq \frac{900-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

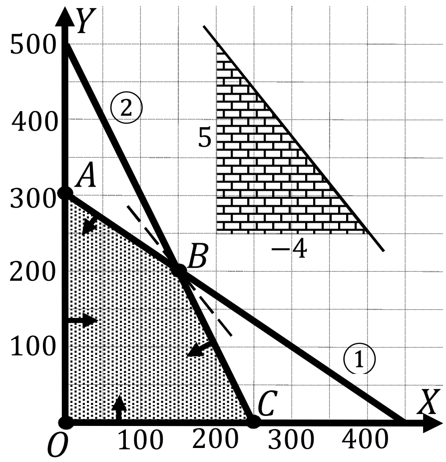
x	0	450
y	300	0

$② \Rightarrow 2x+y \leq 500 \Rightarrow y \leq 500-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	250
y	500	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,300).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ -2x-y=-500 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y=400;\ \ y=200;\ \ 2x+200=500;$

$2x=300;\ \ x=150 \Rightarrow B(150,200).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \Rightarrow C(250,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=15x+12y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,300)=15\cdot 0+12\cdot 300=0+3.600=3.600.$

$B \Rightarrow f(150,200)=15\cdot 150+12\cdot 200=2.250+2.400=4.650.$

$C \Rightarrow f(250,0)=15\cdot 250+12\cdot 0=3.750+0=3.750.$

El valor máximo se produce en el punto $B(150, 200)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 15x + 12y = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{12}x = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ elaborando\ 150\ lotes\ A\ y\ 200\ lotes\ B}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.650\ euros}.$$

****

3º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ $y\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema $\left.\begin{array}{r}-2X+Y=A+B\\ 5X+Y=A-2B\end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r}-2X+Y=A+B\\ 5X+Y=A-2B\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}2X-Y=-A-B\\ 5X+Y=A-2B\end{array}\right\} \Rightarrow 7X=-3B;\ \ X=-\frac{3}{7}B\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X=-\frac{3}{7}B=-\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & \frac{3}{7}\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r}-2X+Y=A+B\\ 5X+Y=A-2B\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}-10X+5Y=5A+5B\\ 10X+2Y=2A-4B\end{array}\right\} \Rightarrow 7Y=7A+B;\ Y=A+\frac{1}{7}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & -\frac{1}{7}\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y=\begin{pmatrix}\frac{6}{7} & \frac{36}{7}\\ 0 & -\frac{22}{7}\end{pmatrix}}.$$

****

4º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$. Halla, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

$$A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}; \;\; |A| = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1; \;\; Adj\ de\ A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ de\ A^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$A^t = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{x = 0}.$$

De otra forma:

Cumpliéndose que $A^t = A^{-1}$, se tiene que cumplir que: $A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{x = 0}.$$

****

5º) El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \ \ (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

$G(0) = 60.$

$G(8) = 2 \cdot 8^3 - 27 \cdot 8^2 + 84 \cdot 8 + 60 = 2 \cdot 512 - 27 \cdot 64 + 672 + 60 =$

$= 1.024 - 1.728 + 672 + 60 = 1.756 - 1.728 = 28.$

$G'(t) = 6t^2 - 54t + 84.$ $\qquad\qquad$ $G''(t) = 12t - 54.$

$G'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0;\ \ t^2 - 9t + 14 = 0;\ \ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} =$

$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2;\ \ t_2 = 7.$

$G''(2) = 12 \cdot 2 - 54 = 24 - 54 = -30 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$

$G(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 + 60 = 16 - 108 + 168 + 60 =$

$= 244 - 108 = 136.$

$\underline{El\ gasto\ máximo\ se\ produce\ a\ las\ 2\ horas\ y\ es\ de\ 136\ euros.}$

$G''(7) = 12 \cdot 7 - 54 = 84 - 54 = 30 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 7.$

$G(7) = 2 \cdot 7^3 - 27 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 + 60 = 2 \cdot 343 - 27 \cdot 49 + 588 + 60 =$

$= 686 - 1.323 + 648 = 1.334 - 1.323 = 11.$

$\underline{El\ gasto\ mínimo\ se\ produce\ a\ las\ 7\ horas\ y\ es\ de\ 11\ euros.}$

****

6º) En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en la superficie (en kg), $F(x)$. La relación entra ambas cantidades viene dada por la función $F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & si \quad x > 3 \end{cases}$. Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(4) = 12;\ \ 4^2 - 3A \cdot 4 + 8B = 16 - 12A + 8B = 12;\ \ 12A - 8B = 4;$

$3A - 2B = 1.$ (1)

$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B \cdot 3 + 2A = 2A + 6B.$

$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A \cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B \cdot 3 + 2A = 2A + 6B \\ \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A \cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 6B = -9A + 8B + 9;\ \ 11A - 2B = 9.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3A - 2B = 1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3A + 2B = -1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 8A = 8;\ \ \underline{A = 1}.$$

$3 \cdot 1 - 2B = 1;\ \ 2B = 3 - 2;\ \ 2B = 2;\ \ \underline{B = 1}.$

****

7º) Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2-1}{3(x^2+x-2)}$.

----

a)

En el intervalo $(4, 6)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_4^6 f(x) \cdot dx = \int_4^6 (x^2 + x - 2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_4^6 =$$

$$= \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6\right) - \left(\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4\right) = 72 + 18 - 12 - \frac{64}{3} - 8 + 8 =$$

$$= 78 - \frac{64}{3} = \frac{234-64}{3} = \frac{170}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{170}{3}\ u^2 \cong 56{,}67\ u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2 + x - 2) = 0;\ \ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$$

$$\underline{\textit{Asíntotas verticales}: x = -2\ y\ x = 1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2-1}{3(x^2+x-2)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{\textit{Asíntota horizontal}: y = -\frac{2}{3}.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

8º) Una biblioteca cuenta con 1.000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

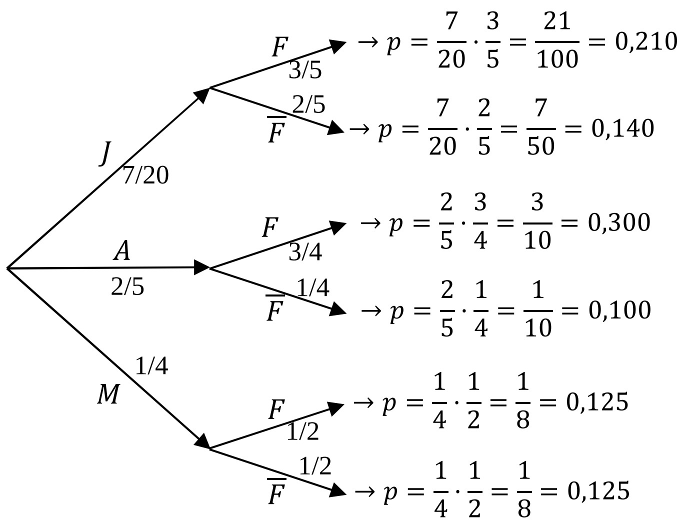
b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la respuesta en marcha del servicio.

----

a)

$$P(J)=\frac{350}{1.000}=\frac{7}{20}. \qquad P(A)=\frac{400}{1.000}=\frac{2}{5}. \qquad P(M)=\frac{250}{1.000}=\frac{1}{4}.$$

$$P(F/J)=\frac{210}{350}=\frac{3}{5}. \qquad P(F/A)=\frac{300}{400}=\frac{3}{4}. \qquad P(F/M)=\frac{125}{250}=\frac{1}{2}.$$



$$P(\overline{F}/A)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}=\underline{0{,}25}.$$

b)

$$P=P(F)=P(J\cap F)+P(A\cap F)+P(M\cap F)=$$

$$=P(J)\cdot P(F/J)+P(A)\cdot P(F/A)+P(M)\cdot P(F/M)=$$

$$=\frac{7}{20}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{100}+\frac{3}{10}+\frac{1}{8}=\frac{210+300+125}{1.000}=\frac{635}{1.000}=\underline{0{,}635}.$$

****

9º) El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=36;\;\; \overline{x}=800;\;\; \sigma=72;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(800-1{,}96\cdot\frac{72}{\sqrt{36}};\; 800+1{,}96\cdot\frac{72}{\sqrt{36}}\right);\;\; (800-1{,}96\cdot 12;\; 800+1{,}96\cdot 12);$$

$(800-23{,}52;\; 800+23{,}52).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(776{,}48;\; 823{,}52)}.$$

****

10º) Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$
$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

Teniendo en cuenta que el error máximo es la mitad del intervalo de confianza, los datos son los siguientes:

Datos: $\sigma=400$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96$; $E=\frac{160}{2}=80$.

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{400}{80}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 5)^2=9{,}8^2=96{,}04.$

$\underline{El\ número\ de\ familias\ consultadas\ tiene\ que\ ser\ de\ 97.}$

****