PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y una hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y ½ hora de reglaje con un beneficio de 280 euros. Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el beneficio máximo?

b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

----

a)

Sean x e y el número de motores de los tipos A y B que se fabrican en el taller, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y \leq 300 \\ x+0{,}5y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \leq 80 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y \leq 300 \\ 2x+y \leq 240 \\ x \geq 0;\ y \leq 80 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow 2x+3y \leq 300 \Rightarrow y \leq \frac{300-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	150
y	100	0

$(2) \Rightarrow 2x+y \leq 240 \Rightarrow y \leq 240-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	120	80
y	0	80

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

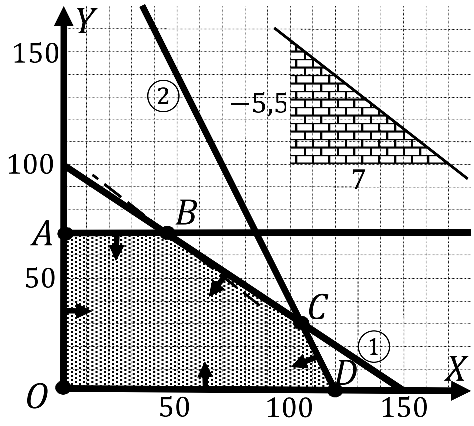
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,80).$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=80 \\ 2x+2y=240 \end{array}\right\} \Rightarrow x=40 \Rightarrow B(40,80).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=300 \\ 2x+y=240 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=300 \\ -2x-y=-240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=60;\ \ y=30;\ \ x=105 \Rightarrow C(105,30).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=240 \end{array}\right\} \Rightarrow x=120 \Rightarrow A(120,0).$$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,80) = 220 \cdot 0 + 280 \cdot 80 = 0 + 120 = 22.400.$$

$$B \Rightarrow f(40,80) = 220 \cdot 40 + 280 \cdot 80 = 8.800 + 22.400 = 31.200.$$

$$C \Rightarrow f(105,30) = 220 \cdot 105 + 280 \cdot 30 = 23.100 + 8.400 = 31.500.$$

$$D \Rightarrow f(120,0) = 220 \cdot 120 + 280 \cdot 0 = 26.400 + 0 = 26.400.$$

El máximo se produce en el punto $C(105,30)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(105,30)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 220x + 280y = 0 \Rightarrow y = -\frac{220}{280}x = -\frac{11}{14}x = -\frac{5{,}5}{7}x \Rightarrow m = -\frac{5{,}5}{7}.$$

$$\underline{El\ taller\ debe\ fabricar\ 105\ motores\ tipo\ A\ y\ 30\ de\ tipo\ B.}$$

$b)$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 31.500\ euros.}$$

****

2º) La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50, (0 \leq t \leq 10),$$

donde t es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilovatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia.

b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t = 1\ y\ t = 5$.

----

a)

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(t) = -3t^2 + 30t - 48.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 30t - 48 = 0;\ \ t^2 - 10t + 16 = 0;\ \ t = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 8.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(t) = -6t + 30.$$

$$P''(2) = -6 \cdot 2 + 30 = -12 + 30 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 2.$$

$$P''(8) = -6 \cdot 8 + 30 = -48 + 30 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 8.$$

$$\underline{El\ máximo\ de\ potencia\ se\ produce\ a\ las\ 8\ horas\ y\ el\ mínimo\ a\ las\ 2\ horas.}$$

b)

$$P(2) = -2^3 + 15 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 50 = -8 + 60 - 96 + 50 = 6.$$

$$P(8) = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 50 = -512 + 960 - 384 + 50 = 114.$$

$$\underline{La\ máxima\ potencia\ es\ de\ 114\ kw\ y\ la\ mínima\ 6\ kw.}$$

$c)$

Teniendo en cuanta el apartado anterior, todas las ordenadas de la función $P(t)$ entre los valores $t = 1\ y\ t = 5$ son positivos, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^5 (-t^3 + 15t^2 - 48t + 50) \cdot dt = \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{15t^3}{3} - \frac{48t^2}{2} + 50t\right]_1^5 =$$

$$= \left[-\frac{t^4}{4} + 5t^3 - 24t^2 + 50t\right]_1^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^4}{4} + 5 \cdot 5^3 - 24 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 5 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 50 \cdot 1\right) =$$

$$= 5^2 \cdot \left(-\frac{5^2}{4} + 5 \cdot 5 - 24 + 10\right) + \frac{1}{4} - 5 + 24 - 50 =$$

$$= 25 \cdot \left(-\frac{25}{4} + 25 - 14\right) + \frac{1}{4} - 31 = 25 \cdot \left(-\frac{25}{4} + 11\right) + \frac{1}{4} - 31 =$$

$$= 25 \cdot \frac{-25+44}{4} + \frac{1}{4} - 31 = 25 \cdot \frac{19}{4} + \frac{1}{4} - 31 = \frac{475+1-124}{4} = \frac{352}{4} = 88.$$

$$\underline{S = 88\ u^2}.$$

****

3º) Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10.000 conductores, de los cuales 5.000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3.000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra?

b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1,2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 0,3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

----

a)

$$n_1 = \frac{5.000}{10.000} \cdot 500 = \frac{1}{2} \cdot 500 = 250.$$

$$n_2 = \frac{3.000}{10.000} \cdot 500 = \frac{3}{10} \cdot 500 = 150.$$

$$n_3 = \frac{2.000}{10.000} \cdot 500 = \frac{1}{5} \cdot 500 = 100.$$

$$\underline{Mas\ de\ 10\ años: 250;\ entre\ 3\ y\ 10\ años: 150\ y\ menos\ de\ 3\ años: 100.}$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 1{,}2;\ \ \sigma = 0{,}3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{100}};\ 1{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{100}}\right);\ \ (1{,}2 - 1{,}96 \cdot 0{,}03;\ 1{,}2 + 1{,}96 \cdot 0{,}03);$$

$(1{,}2 - 0{,}0588;\ 1{,}2 + 0{,}0588).$

$$\underline{I.C._{95\ \%} = (1{,}1412;\ 1{,}2588).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.

b) Para $b=1$, hallar la matriz X que verifique $A\cdot X=A^3-I$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=3-2b=0\Rightarrow b=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ \text{únicamente}\ para\ b=1{,}5.}$$

b)

$$A\cdot X=A^3-I;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A^3-I);\ \ I\cdot X=A^{-1}\cdot(A^3-I)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{X=A^{-1}\cdot(A^3-I)}.$$

Para $b=1$ es $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\rightarrow F_3-2F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\rightarrow F_1-2F_2\\ F_3\rightarrow F_3+4F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_1\rightarrow F_1-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 8 & 4 & 11\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 8 & 4 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 10 & 15\\ 0 & 1 & 0\\ 30 & 20 & 41\end{pmatrix}.$$

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot (A^3 - I) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la ecuación: $S(t)=At^3-2Bt^2+5t, 1\leq t\leq 6$, donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Calcular las asíntotas de la función $G(t)=\frac{S(t)}{t^2(t-2)}$ en el intervalo $(1,\infty)$.

----

a)

Sabemos que $S(5)=0$:

$$S(5)=A\cdot 5^3-2B\cdot 5^2+5\cdot 5=125A-50B+25=0;$$

$$5A-2B+1=0. \quad (1)$$

Por tener un máximo para $t=5\Rightarrow S'(5)=0$:

$$S'(t)=3At^2-4Bt+5.$$

$$S'(5)=3A\cdot 5^2-4B\cdot 5+5=0;\ \ 15A-4B+1=0. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 5A-2B=-1 \\ 15A-4B=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10A+4B=2 \\ 15A-4B=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5A=1;\ \ \underline{A=\frac{1}{5}}.$$

$$5\cdot\frac{1}{5}-2B=-1;\ \ 1-2B=-1;\ \ 2B=2;\ \ \underline{B=1}.$$

La función resulta $S(t)=\frac{1}{5}t^3-2t^2+5t=\frac{t}{5}(t^2-10t+25)=\frac{t}{5}(t-5)^2$.

b)

$$G(t)=\frac{S(t)}{t^2(t-2)}=\frac{\frac{t}{5}(t-5)^2}{t^2(t-2)}=\frac{(t-5)^2}{5t(t-2)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{t\to\pm\infty}G(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{(t-5)^2}{5t(t-2)}=\frac{+\infty}{+\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot(t-5)\cdot 1}{5\cdot(t-2)+5t\cdot 1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot(t-5)}{5t-10+5t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot(t-5)}{10t-10}=\frac{t-5}{5t-5}=\frac{1}{5}.$$

$$\underline{La\ recta\ y=\frac{1}{5}\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$5t(t-2)=0 \Rightarrow t_1=0, t_2=2.$

$$\underline{Las\ rectas\ t=0\ y\ t=2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

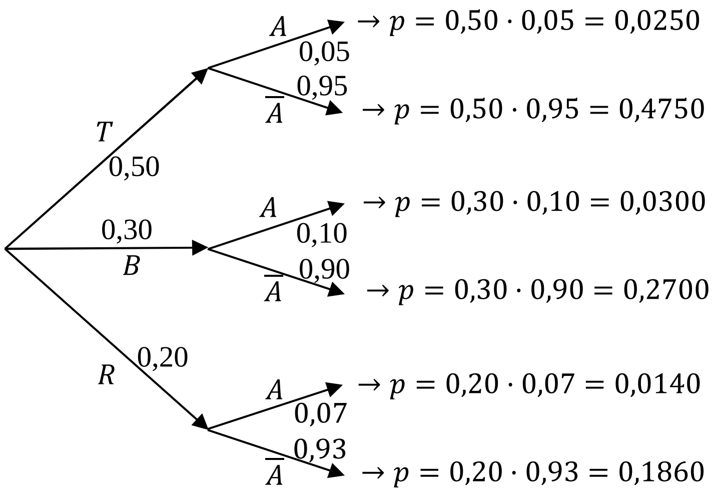
****

3º) En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado. Mediante muestreo estratificado con afijación proporcional:

a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?



a)

$$P = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = 0{,}30 \cdot 0{,}0{,}10 = \underline{0{,}03}.$$

b)

$$P = P\left(T/\overline{A}\right) = P(T) \cdot P\left(\overline{A}/T\right) = 0{,}50 \cdot 0{,}95 = \underline{0{,}475}.$$

c)

$$P = P(T/A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{P(T) \cdot P(A/T)}{P(T) \cdot P(A/T) + P(B) \cdot P(A/B) + P(R) \cdot P(A/R)} =$$

$$= \frac{0{,}50 \cdot 0{,}05}{0{,}50 \cdot 0{,}05 + 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}20 \cdot 0{,}07} = \frac{0{,}0250}{0{,}0250 + 0{,}0300 + 0{,}0140} = \frac{0{,}0250}{0{,}0690} = \underline{0{,}3623}.$$

****