PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Una empresa farmacéutica produce vacunas contra la gripe y contra la neumonía en dos laboratorios: A y B. El laboratorio A produce diariamente 2.000 dosis de vacunas contra la gripe y 2.000 dosis contra la neumonía, con un coste diario de 8.000 euros y el laboratorio B, 4.000 dosis de vacunas contra la gripe y 1.000 contra la neumonía, con un coste diario de 10.000 euros. Si se recibe un pedido de 24.000 dosis de vacunas contra la gripe y 18.000 contra la neumonía, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos días debe funcionar cada laboratorio para satisfacer el pedido con el mínimo coste?

b) ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

----

a)

Sean x e y los días que tienen que trabajar los laboratorios A y B, respectivamente.

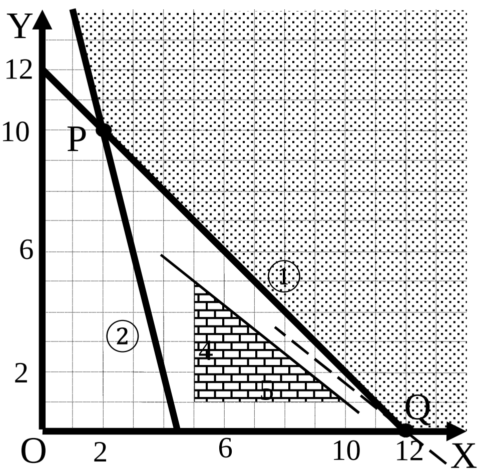
Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2.000x + 2.000y &\geq 24.000 \\ 4.000x + 1.000y &\geq 18.000 \\ x \geq 0;\, y &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &\geq 12 \\ 4x + y &\geq 18 \\ x \geq 0;\, y &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

La función de objetivos es la siguiente:

$$f(x, y) = 8.000x + 10.000y.$$

La región factible se indica en la figura:



$① \Rightarrow x + y \geq 12 \Rightarrow y \geq 12 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	0	12
y	12	0

x	2	4
y	10	2

$② \Rightarrow 4x + y \geq 18 \Rightarrow y \geq 18 - 4x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$P \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ 4x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(2,10)}. \qquad Q \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(12,0)}.$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$P \Rightarrow f(2,10) = 2 \cdot 8.000 + 10 \cdot 10.000 = 16.000 + 100.000 = 116.000.$$

$$Q \Rightarrow f(12,0) = 12 \cdot 8.000 + 0 \cdot 10.000 = 96.000 + 0 = 96.000.$$

El mínimo se produce en el punto Q.

También se hubiera obtenido el punto Q por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 8.000x + 10.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{8.000}{10.000}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$$

$$\underline{El\ mínimo\ coste\ se\ obtiene\ trabajando\ 12\ días\ únicamente\ el\ laboratorio\ B.}$$

$b)$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 96.000\ euros}.$$

****

2º) La altura alcanzada por un cohete en su trayectoria viene dada en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento por la expresión: $H(t)=\begin{cases} t(a-t) & si\ 0\le t\le 30 \\ b+ct & si\ 30<t\le 60 \end{cases}$, siendo $H(t)$ la altura (en metros) alcanzada por el cohete a los t segundos de su lanzamiento. Sabiendo que es una función continua, que a los 20 segundos del lanzamiento el cohete alcanza la altura máxima de 400 metros, y que a los 60 segundos del lanzamiento cae al suelo:

a) Determinar, justificando las respuestas, los valores de las constantes $a, b\ y\ c$.

b) Representar gráficamente la altura alcanzada por el cohete en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento.

----

a)

$$H(20)=400 \Rightarrow 20\cdot(a-20)=400;\ \ 20a-400=400;\ \ 20a=800\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \underline{a=40}$.

$$H(60)=0 \Rightarrow b+c\cdot 60=0;\ \ b+60c=0.\ \ \ (1)$$

Por ser continua la función: $\lim\limits_{t\to 30^-} H(t)=\lim\limits_{t\to 30^+} H(t)=H(30)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 30^-} H(t)=\lim\limits_{t\to 30}[30(40-30)]=30\cdot 10=300=H(30) \\ \lim\limits_{t\to 30^+} H(t)=\lim\limits_{t\to 30}(b+c\cdot t)=b+30c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b+30c=300.\ \ \ (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} b+60c=0 \\ b+30c=300 \end{array}\right\}\ \ \left.\begin{array}{r} -b-60c=0 \\ b+30c=300 \end{array}\right\} \Rightarrow -30c=300 \Rightarrow\ \underline{c=-10}.$$

$$b+60c=0;\ \ b+60\cdot(-10)=0;\ \ b-600=0\ \Rightarrow\ \underline{b=600}.$$

b)

La función resulta: $H(t)=\begin{cases} t(40-t) & si\ \ 0\le t\le 30 \\ 600-10t & si\ 30<t\le 60 \end{cases}$.

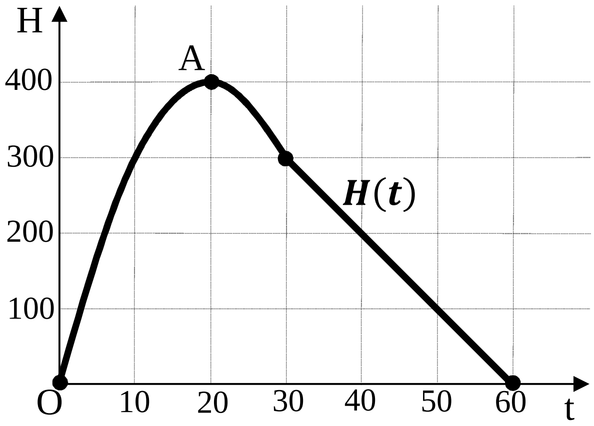
En el intervalo $0\le t\le 30$ la función es una parábola cóncava $(\cap)$ de expresión $H_1(t)=-t^2+40t$, cuyo máximo es el siguiente:

$$H_1'(t)=-2t+40=0 \Rightarrow t=20.$$

$$H_1(20)=-20^2+40\cdot 20=-400+800=400\ \Rightarrow M\acute{a}ximo\!: A(20, 400).$$

En el intervalo $30 \leq t \leq 60$ la función es una recta de pendiente negativa cuya expresión es $H_2(t) = 600 - 10t$.

Teniendo en cuenta que $H_2(60) = 600 - 10 \cdot 60 = 0$, la representación gráfica de la función es la siguiente:



****

3º) En el Senado de cierto país hay 400 senadores. El 25 % de ellos son menores de 40 años. El Senado está organizado en los grupos parlamentarios: G1, G2, G3 y G4. El G1 tiene 120 senadores, 30 de ellos menores de 40 años, el G2 tiene 110 senadores, 20 de ellos menores de 40 años, el G3 tiene 100 senadores, 28 de ellos menores de 40 años, y el G4 están el resto de los senadores. Determinar, justificando las respuestas, la probabilidad de que seleccionado al azar un senador de ese Senado:

a) Sea del grupo G3.

b) Sea del grupo G2 y tenga menos de 40 años.

Nota: En mi criterio, el ejercicio propicia la duda de elegir senador-grupo o grupo-senador.

SENADOR-GRUPO

a)

$$\underline{P = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

b)

$$P = \frac{110}{400} \cdot \frac{20}{110} = \frac{20}{400} = \underline{\frac{1}{20} = 0,050.}$$

GRUPO-SENADOR

a)

$$\underline{P = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

b)

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{110} = \frac{5}{110} = \underline{\frac{1}{22} = 0,045.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean A e I las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de a para que se verifique la ecuación matricial: $A + A^{-1} = I$.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determinar la matriz A^{10}.

----

a)

Multiplicando los dos términos por A (en este caso es independiente que se haga por la izquierda o por la derecha):

$$A \cdot (A + A^{-1}) = A \cdot I;\ \ A^2 + A \cdot A^{-1} = A;\ \ A^2 + I = A\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + I = A;\ \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{a = 1}.$$

b)

Para $a = 1$ resulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2.$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -A^3 = -(-I) = I.$$

$$A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A.$$

. . . .

En general:

$$\underline{A^n\ es\ igual\ que\ A\ resto\ de\ la\ división\ de\ n\ entre\ 6.}$$

En el caso particular de A^{10}, como el resto de dividir 10 entre 6 es 4:

$$\underline{A^{10} = A^4 = -A}.$$

También se resuelve el ejercicio de la forma siguiente:

$A^{10} = (A^5)^2 = (-A^2)^2 = A^4 \;\Rightarrow\; \underline{A^{10} = -A}.$

****

2º) Una explotación ganadera ha estimado que sus beneficios a lo largo de los últimos diez años, dependen del número de años en funcionamiento, de acuerdo con la siguiente función: $B(x) = -2x^3 + 30x^2 - 96x$, donde $B(x)$ es el beneficio (en miles de euros) a los x años de funcionamiento. Se pide, justificando las respuestas e interpretando los resultados obtenidos:

$a)$ ¿En qué años fueron máximos y mínimos los beneficios?

$b)$ ¿Cuáles fueron los valores de dichos beneficios máximo y mínimo?

$c)$ Representar de forma aproximada $B(x)$ a lo largo de los últimos 10 años.

$a)$

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$B'(x) = -6x^2 + 60x - 96. \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 60x - 96 = 0;$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0; \; x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$B''(x) = -12x + 60.$$

$$B''(2) = -12 \cdot 2 + 60 = -24 + 60 = 36 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 2.$$

$$B''(8) = -12 \cdot 8 + 60 = -96 + 60 = -36 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 8.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ fueron\ máximos\ el\ octavo\ año\ y\ mínimos\ el\ segundo.}$$

$b)$

$$B(8) = -2 \cdot 8^3 + 30 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 = -2 \cdot 512 + 30 \cdot 64 - 192 =$$

$$= -1.024 + 1.920 - 192 = 1.920 - 1.216 = 704.$$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ fue\ de\ 704.000\ euros.}$$

$$B(2) = -2 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 = -2 \cdot 8 + 30 \cdot 4 - 192 =$$

$$= -16 + 120 - 192 = 120 - 208 = -88.$$

$$\underline{El\ beneficio\ (pérdidas)\ mínimo\ fueron\ unas\ pérdidas\ de\ 88.000\ euros.}$$

$c)$

Para representar de forma aproximada la función beneficios a lo largo de los últimos 10 años, tenemos en cuenta, además de que $B(0) = 0$, algunos de sus valores intermedios:

$$B(4) = -2 \cdot 4^3 + 30 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = -2 \cdot 64 + 30 \cdot 16 - 384 =$$

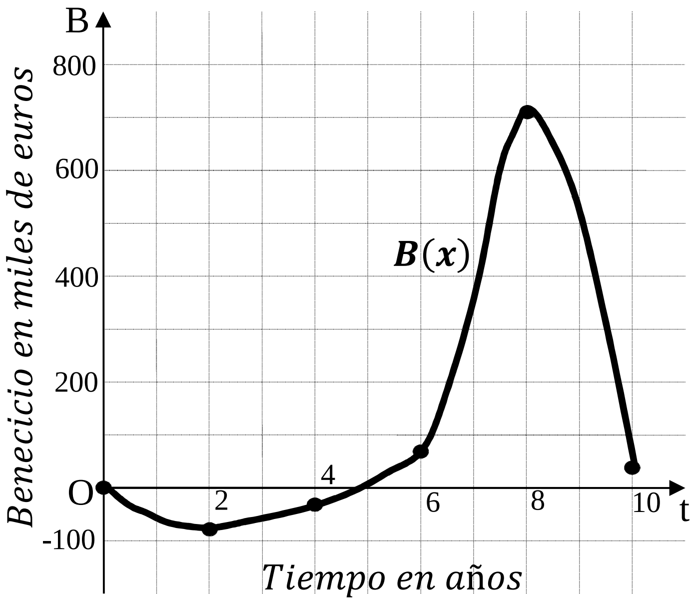
$$= -128 + 480 - 384 = 480 - 512 = -32.$$

$$B(6) = -2 \cdot 6^3 + 30 \cdot 6^2 - 96 \cdot 6 = -2 \cdot 216 + 30 \cdot 36 - 576 =$$

$$= -432 + 1.080 - 576 = 1.080 - 1.008 = 72.$$

$$B(10) = -2 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^2 - 96 \cdot 10 = -2 \cdot 1.000 + 30 \cdot 100 - 960 =$$

$$= -2.000 + 3.000 - 960 = 3.000 - 2.960 = 40.$$



****

3º) El porcentaje de peso que se pierde tras la realización de un programa de ejercicios sigue una distribución Normal con desviación típica 0,5, tanto en hombres como en mujeres. Un grupo de hombres y otro de mujeres de cierta región realizaron dicho programa de ejercicios. Se recogió la siguiente información sobre el porcentaje de peso perdido:

Hombres	3,1	3,9	3,7	4,0	4,1	4,2	4,0	3,8	3,9	4,1
Mujeres	3,0	3,8	2,5	4,1	3,7	3,6	3,3	4,0	3,7	2,9

Se pide, justificando las respuestas:

a) Una estimación del porcentaje medio de peso que se pierde en mujeres.

b) ¿Se podría concluir, para α = 0,05, que el porcentaje medio de peso que se pierde es diferente en hombres y en mujeres?

----

a)

$$\overline{x_M} = \frac{3,0+3,8+2,5+4,1+3,7+3,6+3,3+4,0+3,7+2,9}{10} = \frac{34,6}{10} = 3,46.$$

$$\underline{El\ peso\ medio\ perdido\ por\ las\ mujeres\ es\ del\ 0{,}0345\ \%.}$$

b)

Se va a determinar un intervalo de confianza para la diferencia de medias, para lo cual determinamos el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$, pues la fórmula que nos da el intervalo es la siguiente:

$$\left[(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}};\ (\overline{x_1} - \overline{x_2}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

$$\alpha = 0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96. \qquad (1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \rightarrow z = 1{,}96).$$

$$\overline{x_H} = \frac{3,1+3,9+3,7+4,0+4,1+4,2+4,0+3,8+3,9+4,1}{10} = \frac{38,8}{10} = 3,88.$$

Datos:

$$\overline{x_1} = \overline{x_H} = 3{,}88;\ \overline{x_2} = \overline{x_M} = 3{,}46;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}5;\ n_1 = n_2 = 10.$$

$$\left[(3{,}88 - 3{,}46) - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5^2}{10} + \frac{0{,}5^2}{10}};\ (3{,}88 - 3{,}46) + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5^2}{10} + \frac{0{,}5^2}{10}}\right];$$

$$\left(0{,}42 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}50}{10}};\ 0{,}42 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}50}{10}}\right);$$

$$(0{,}42 - 1{,}96 \cdot 0{,}224;\ 0{,}42 + 1{,}96 \cdot 0{,}224);\ (0{,}42 - 0{,}438;\ 0{,}42 + 0{,}438)\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ (-0{,}018;\ \ 0{,}858).$

Que el valor del límite inferior del intervalo sea negativo (el intervalo contiene al cero) indica que para los datos de este ejercicio no puede concluirse la existencia de diferencias entre las medias.

$\underline{El\ peso\ que\ pierden\ hombres\ y\ mujeres\ es, aproximadamente, el\ mismo}.$

****