PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el estudiante. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora científica, excepto aquellas que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de b es compatible el sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{cases}$.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de b es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=(1+b)^2-b-2b+(1+b)+b^2-2(1+b)=1+2b+b^2-3b-(1+b)+b^2=$$

$$=1-b+2b^2-1-b=2b^2-2b=2b(b-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{b_1=0},\; \underline{b_2=1}.$$

$$Para \begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\;\; b=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; de\;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1-2-2=-3\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; b=0 \Rightarrow Rango\; M=2\;\; ;;\;\; Rango\; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}.$$

$$Para\;\; b=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{F_1=F_2\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; b=1 \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=2<n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; indeterminado}}.$$

b)

Resolvemos para b = 1 en cuyo caso el sistema es $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $\underline{z=\lambda}$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=2+\lambda \\ x+y=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x+2y=2+\lambda \\ -x-y=-1+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=1+3\lambda}\;\; ;;\;\; x=1-2\lambda-y=$

$$=1-2\lambda-1-3\lambda=\underline{-5\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=-5\lambda \\ y=1+3\lambda,\;\; \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}.$$

****

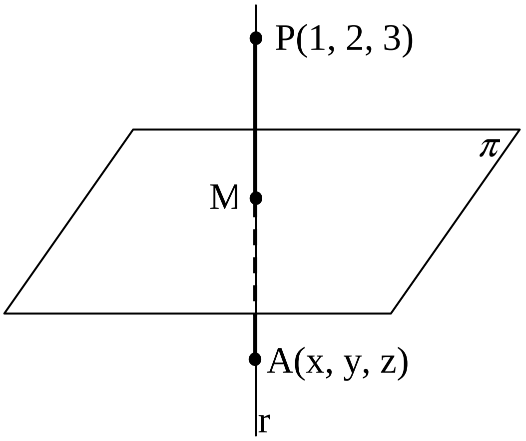
2º) Calcule la ecuación general del plano que pasa por los puntos A, B y C, siendo:

A: el simétrico del punto P(1, 2, 3) respecto del plano x = z.

B: la proyección ortogonal del punto Q(2, 1, 3) sobre el plano z = 0.

C: el origen de coordenadas.

El plano x = z tiene como vector director a $\vec{u}=(1,\ 0,\ -1)$.



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano x = z tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3-\lambda \end{cases}.$$

El punto M, intersección del plano x = z con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} x=z \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda=3-\lambda\ ;;\ 2\lambda=2\ ;;\ \lambda=1 \Rightarrow \underline{M(2,\ 2,\ 2)}.$$

Para que A sea el punto simétrico de P con respecto al plano x = z, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MA} \Rightarrow M-P=A-M\ ;;\ (2,\ 2,\ 2)-(1,\ 2,\ 3)=(x,\ y,\ z)-(2,\ 2,\ 2)\ ;;$$

$$(1,\ 0,\ -1)=(x-2,\ y-2,\ z-2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2=1 \ \rightarrow\ \underline{x=3} \\ y-2=0 \ \rightarrow\ \underline{y=2} \\ z-2=-1 \ \rightarrow\ \underline{z=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(3,\ 2,\ 1)}.$$

El plano z = 0 tiene como vector director a $\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$.

La recta s que pasa por el punto Q(2, 1, 3) y es perpendicular al plano z = 0 tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3+\lambda \end{cases}$.

El punto B es la intersección de la recta r y el plano z = 0, que es B(2, 1, 0).

Los puntos A(3, 2, 1), B(2, 1, 0) y C(0, 0, 0) determinan los vectores $\overrightarrow{CA}=(3,\ 2,\ 1)$ y $\overrightarrow{CB}=(2,\ 1,\ 0)$.

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2y+3z-4z-x=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv x-2y+z=0}}.$$

****

3º) Sea la función $f(x)=e^x \cdot \cos x$ definida en el intervalo (0, 2π).

a) Calcula y determina los extremos de f(x).

b) Calcula y determina los puntos de inflexión de f(x).

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. $f'(x)=e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \cos x = e^x(\cos x - sen\ x)$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^x(\cos x - sen\ x)=0 \;;;\; \cos x - sen\ x = 0 \;;;\; sen\ x = \cos x \Rightarrow \underline{x_1=\frac{\pi}{4}},\ \underline{x_2=\frac{5\pi}{4}}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=e^x(\cos x - sen\ x)+e^x(-sen\ x - \cos s\ x)=e^x(\cos x - sen\ x - sen\ x - \cos x)=\underline{-2e^x\ sen\ x}.$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-2e^{\frac{\pi}{4}} \cdot sen\frac{\pi}{4}=-2e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=-e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}<0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ para\ \ x=\frac{\pi}{4}}.$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\frac{\pi}{4}=e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ \ relativo:\ P\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}\right)}}.$$

$$f''\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)=-2e^{\frac{5\pi}{2}} \cdot sen\frac{5\pi}{4}=-2e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2}=e^{\frac{5\pi}{2}} \cdot \sqrt{2}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\frac{5\pi}{4}}.$$

$$f\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)=e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \cos\frac{5\pi}{4}=-e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo:\ Q\left(\frac{5\pi}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}}\right)}}.$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

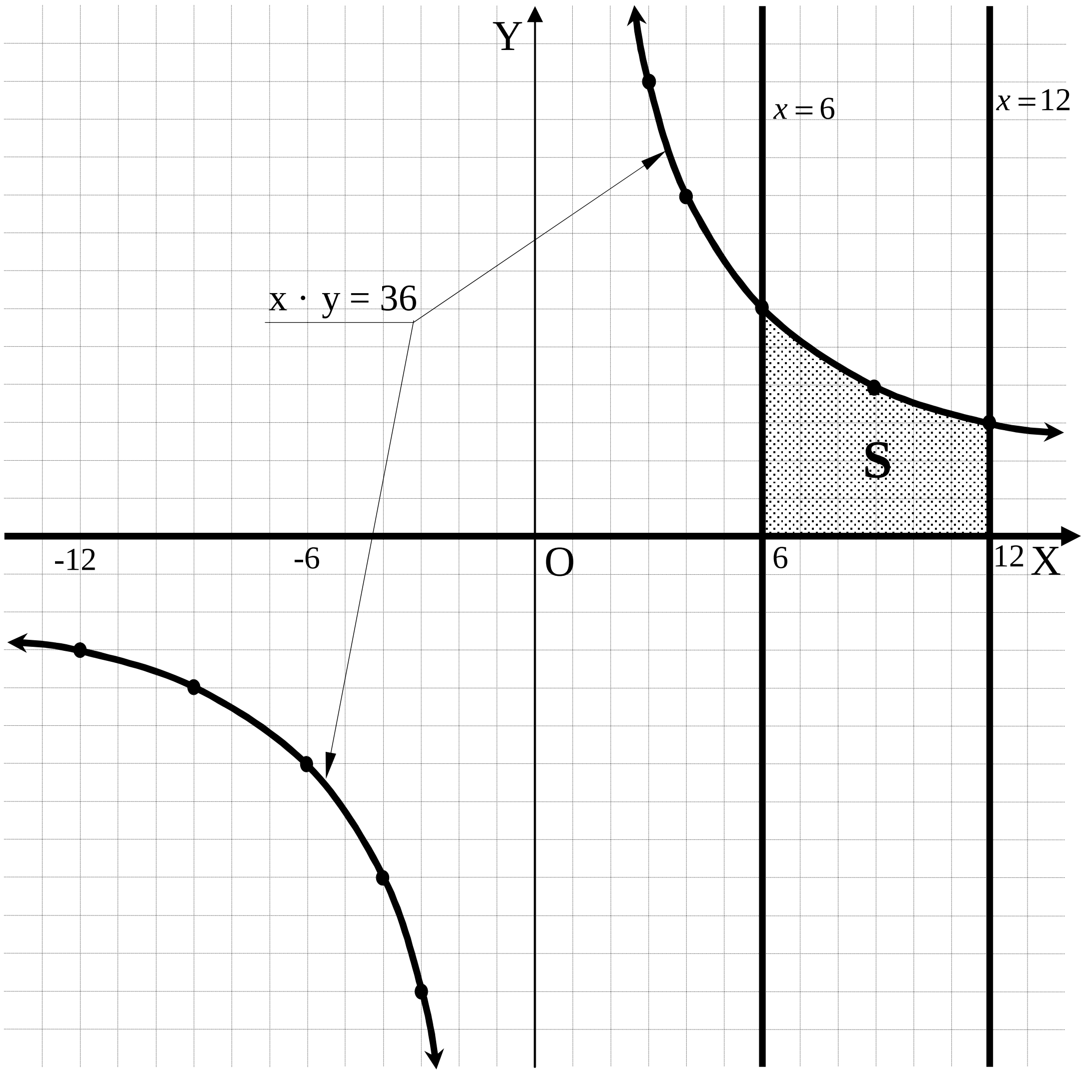
$$f''(x)=0 \Rightarrow -2e^x\ sen\ x=0 \;;;\; sen\ x=0 \Rightarrow \underline{x_1=0},\ \underline{x_2=\pi}.$$

$$f(0)=e^0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I. \Rightarrow C(0,\ 1)}}.$$

$$f(\pi)=e^{\pi} \cdot \cos\pi = e^{\pi} \cdot (-1) = -e^{\pi} \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I. \Rightarrow D(\pi,\ -e^{\pi})}}.$$

****

4º) Haga un dibujo del recinto limitado por la curva $x \cdot y = 36$, el eje OX y las rectas verticales x = 6 y x = 12. Calcule es área de este recinto.



La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.

La curva se puede expresar en forma de función así: $y = f(x) = \frac{36}{x}$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_6^{12} \frac{36}{x} \cdot dx = 36 \cdot \int_6^{12} \frac{1}{x} \cdot dx = 36 \cdot [L\,x]_6^{12} = 36 \cdot (L12 - L6) = 36 \cdot L\frac{12}{6} = \underline{36 \cdot L2}.$$

$$\underline{\underline{S = 36L2\ u^2 \cong 24'95\ u^2}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir para que valores de α el sistema $\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ 2x-2y=0 \\ ax+y-z=1 \end{cases}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}=2a+4+4a+2=6a+6=6(a+1)=0 \Rightarrow \underline{a=-1}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a\neq -1 \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}}$$

$$Para\;\; a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-C_2\} \Rightarrow Rango\;\; de\;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot(2+1)=-6\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=-1 \Rightarrow Rango\; M=2\;\; ;;\;\; Rango\; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α ≠ -1, en cuyo caso el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ 2x-2y=0 \\ ax+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=y} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ax+x+2z=1 \\ ax+x-z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{z=0}} \Rightarrow (a+1)x=1\;\; ;;\;\; \underline{\underline{x=y=\frac{1}{a+1}}}.$$

****

2º) Determine los puntos P situados a una distancia de 5 unidades del origen de coordenadas y que pertenecen a la recta r que pasa por los puntos A(1, 2, 5) y B(6, 5, 6).

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,\ 3,\ 1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es $P(1+5\lambda,\ 2+3\lambda,\ 5+\lambda)$.

Por condición del problema es $\overline{OP} = 5 \Rightarrow \sqrt{(1+5\lambda)^2 + (2+3\lambda)^2 + (5+\lambda)^2} = 5$;;

$1+10\lambda+25\lambda^2+4+12\lambda+9\lambda^2+25+10\lambda+\lambda^2 = 25$;; $35\lambda^2+32\lambda+5=0$;; $\lambda = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2-700}}{70} =$

$= \frac{-32 \pm \sqrt{1024-700}}{70} = \frac{-32 \pm \sqrt{324}}{70} = \frac{-32 \pm 18}{70} = \frac{-16 \pm 9}{35} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-25}{35} = \underline{-\frac{5}{7}},\ \lambda_2 = \frac{-7}{35} = \underline{-\frac{1}{5}}.$

$$P_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{25}{7} = -\frac{18}{7} \\ y = 2 - \frac{15}{7} = -\frac{1}{7} \\ z = 5 - \frac{5}{7} = -\frac{30}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(-\frac{18}{7},\ -\frac{1}{7},\ -\frac{30}{7}\right)}}.$$

$$P_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \\ z = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(0,\ \frac{7}{5},\ \frac{24}{5}\right)}}.$$

****

3º) a) Calcule el valor de α para que la función $f(x)=\begin{cases} L(x-1)^2+a & si\ \frac{3}{2}\le x\le 2 \\ bx^2-6x & si\ 2<x\le 4 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $\left[\frac{3}{2},\ 4\right]$ y derivable en el intervalo $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$.

b) Para los valores de α y b determinados en el apartado anterior, calcula los puntos del intervalo (1, 4) donde la pendiente de la recta tangente es 3.

----

a)

La función f(x) es continua en R, excepto para el valor x = 2 cuya continuidad depende de los valores α y b que debemos determinar para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando existen sus límites por la izquierda y por la derecha y, además, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[L(x-1)^2+a\right]=f(2)=a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(bx^2-6x\right)=\underline{4b-12} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=4b-12}. \qquad (1)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si\ \frac{3}{2}\le x\le 2 \\ 2bx-6 & si\ 2<x\le 4 \end{cases} \Rightarrow f'(2)=\begin{cases} 2 & si\ \frac{3}{2}\le x\le 2 \\ 4b-6 & si\ 2<x\le 4 \end{cases} \Rightarrow 4b-6=2\ ;;\ 4b=8\ ;;\ \underline{\underline{b=2}}.$$

Sustituyendo en (1) el valor de b: $a=4\cdot 2-12=8-12 \Rightarrow \underline{\underline{a=-4}}$.

b)

Para los valores de α y b obtenidos la función es $f(x)=\begin{cases} L(x-1)^2-4 & si\ \frac{3}{2}\le x\le 2 \\ 2x^2-6x & si\ 2<x\le 4 \end{cases}$

En el intervalo (1, 4) la función puede expresarse por partes de la forma siguiente:
$$f(x)=\begin{cases} L(x-1)^2-4 & si\ 1<x\le 2 \\ 2x^2-6x & si\ 2<x\le 4 \end{cases}.$$

Sabiendo que la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si\ 1<x\le 2 \\ 4x-6 & si\ 2<x\le 4 \end{cases}$$. Los puntos buscados son los siguientes:

$$\frac{2}{x-1}=3\ ;;\ 2=3x-3\ ;;\ 3x=5\ ;;\ \underline{x=\frac{5}{3}}\in(1,\ 2).$$

$$f\left(\tfrac{5}{3}\right)=L\left(\frac{5}{3}-1\right)^2-4=L\frac{4}{9}-4=L4-L9-4\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_1\left(\frac{5}{3},\ L4-L9-4\right)}}.$$

$$4x-6=3\ ;;\ 4x=9\ ;;\ \underline{x=\frac{9}{4}}\in(2,\ 4).$$

$$f\left(\tfrac{9}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2-6\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{8}-\frac{27}{2}=\frac{81-108}{8}=-\frac{27}{8}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_2\left(\frac{9}{4},\ -\frac{27}{8}\right)}}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x}{(x-1)^2}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{x}{(x-1)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=\int \frac{t+1}{t^2}\cdot dt=\int \frac{1}{t}\cdot dt+\int \frac{1}{t^2}\cdot dt=L\,t+\int t^{-2}\cdot dt=$$

$$=L\,t+\frac{t^{-1}}{-1}+C=L\,t-\frac{1}{t}+C=\underline{L|x-1|-\frac{1}{x-1}+C}.$$

$$\underline{\underline{I=\int \frac{x}{(x-1)^2}\cdot dx=L|x-1|-\frac{1}{x-1}+C}}$$

****