PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Calcule todas las matrices de dimensión 2x2 de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfagan $A^2 + 2A + 3I = O$, siendo I la matriz identidad. A continuación calcule la expresión de c en función de α.

b) Demostrar que las matrices del apartado anterior son invertibles y calcular su matriz inversa.

----

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c & a-2-a \\ ac-2c-ac & c+4+a^2+4a \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & a^2+4a+4+c \end{pmatrix}}.$$

$$A^2 + 2A + 3I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & a^2+4a+4+c \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & a^2+4a+4+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2c & -4-2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & a^2+2a+c+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+2a+c+3=0 \Rightarrow \underline{\underline{c = -\left(a^2+2a+3\right)}}.$$

Las matrices pedidas son de la forma: $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2-2a-3 & -2-a \end{pmatrix}}}$.

b)

Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 \\ -a^2-2a-3 & -2-a \end{vmatrix}=-2a-a^2+a^2+2a+3=3 \Rightarrow \underline{|A|\neq 0,\ \forall a\in R}.$$

<u>Las matrices A son inversibles para cualquier valor real de α, como se pedía demostrar.</u>

Las matrices inversas son:

$$A^T=\begin{pmatrix} a & -a^2-2a-3 \\ 1 & -2-a \end{pmatrix} ;;\ Adj.\ A^T=\begin{pmatrix} -2-a & -1 \\ a^2+2a+3 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2-a & -1 \\ a^2+2a+3 & a \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Demostrar que las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y-z=2 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+z=-4 \end{cases}$ se cortan y calcular el punto de corte.

Las rectas r_1 y r_2 determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=-1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=-1 \\ 2x+z=-4 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M’, la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M’ = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M’ = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Rango de M’ $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4+10-16+2=0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=3}.$$

Veamos ahora cuál es el rango de M:

$$Rango \;\; M \Rightarrow \{F_1, \; F_2, \; F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2-3+1=-3 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M=3}.$$

<u>Las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto, como debíamos demostrar.</u>

Para hallar el punto de corte, que es la solución del sistema que determinan las dos rectas; despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y resolviendo por Cramer el sistema $\left.\begin{array}{r} y-z=2 \\ x+y+z=-1 \\ 2x+z=-4 \end{array}\right\}$:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2-4-4+1}{2+2-1}=\frac{-5}{3}=\underline{-\frac{5}{3}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{4+4-2-2}{3}=\underline{\frac{4}{3}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{3}=\frac{-2-4+4}{3}=\underline{-\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{\underline{El\ \ punto\ \ de\ \ corte\ \ es\ \ P\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}}.$$

****

3º) Sea α un valor estrictamente positivo. Consideramos la función polinómica dependiente de α: $f(x) = x^3 + ax + 1$.

a) Demostrar que la ecuación f(x) = 0 solo puede tener como máximo una solución.

b) Demostrar que la solución del apartado anterior existe y está entre -1 y 0.

----

a)

La función $f(x) = x^3 + ax + 1$, por ser polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R.

Por otra parte, por ser α > 0, es $f'(x) = 3x^2 + a > 0$, lo que significa que f(x) es monótona creciente y, en consecuencia, solo corta al eje X en un punto y explica que

<u>La ecuación f(x) = 0 solo tiene una solución, como teníamos que demostrar.</u>

b)

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Teniendo en cuenta la continuidad de f(x) y que α > 0, aplicando el teorema de Bolzano en su intervalo [-1, 0]:

$$f(-1) = (-1)^3 - a + 1 = -1 - a + 1 = -a < 0.$$

$$f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 > 0.$$

<u>Lo anterior prueba que f(x) tiene la solución en (-1, 0), como debíamos demostrar.</u>

****

4º) Haced un dibujo del recinto limitado por la curva $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ entre los valores x =-1, x = 1 y el eje OX. Calcule el área de este recinto.

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es $D(f) \Rightarrow R-\{-2\}$ y pasa por el origen.

Los máximos y mínimos relativos son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+2)-x^2\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\underline{\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}=0 \;;;\; x(x+4)=0 \;;;\; \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=-4}.$$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)\cdot(x+2)^2-x(x+4)\cdot 2\cdot(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4}=\frac{(2x+4)\cdot(x+2)-2x(x+4)}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}=\underline{\frac{8}{(x+2)^3}=f''(x)}.$$

$$f''(0)=\frac{8}{(0+2)^3}=\frac{8}{8}=1>0 \Rightarrow \textit{Mín. para } x=0.\; f(0)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mín.}\rightarrow O(0,\ 0)}}.$$

$$f''(-4)=\frac{8}{(-4+2)^3}=\frac{8}{(-2)^3}=\frac{8}{-8}=-1<0 \Rightarrow \textit{Máx. para } x=-4.\; f(-4)=\frac{(-4)^2}{-4+2}=-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máx.}\rightarrow P(-4,\ -8)}}.$$

Para que existan puntos de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada y como es $f''(x)=\frac{8}{(x+2)^3}\neq 0,\ \forall x\in R$, f(x) no tiene puntos de inflexión.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+2}=\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x+2=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=-2}$.

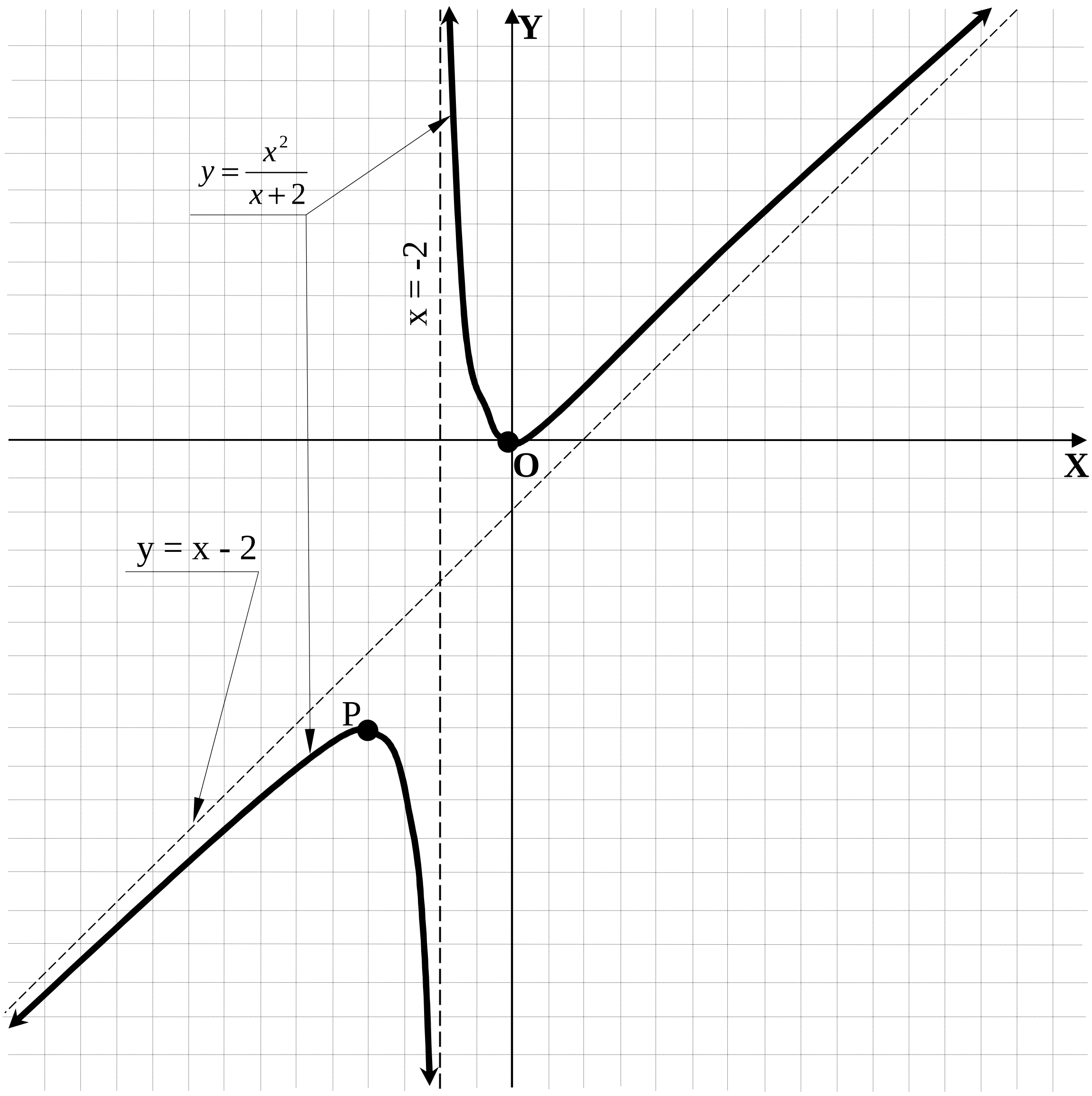
<u>Oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como en nuestro caso ocurre eso, <u>tiene asíntotas oblicuas.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=\underline{1=m}\,.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+2}=\underline{-2=n}\,.$$

La recta y = x – 2 es asíntota oblicua de la función.

Con los datos anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la siguiente:



Como se observa en la figura, en el intervalo (-1, 1) todas las ordenadas de la función son iguales o mayores que cero, por lo que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x+2}\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-4+4}{x+2}\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2}\cdot dx=\int_{-1}^{1}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2x+4L(x+2)\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{2}-2+4L3\right)-\left(\frac{1}{2}+2+4L1\right)=\frac{1}{2}-2+4L3-\frac{1}{2}-2=4L3-4=\underline{4(L3-1)}.$$

$$\underline{\underline{S=4(L3-1)\ u^2}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Demostrar que los puntos $P_1(2, 1, 1)$, $P_2(5, 2, 1)$, $P_3(9, 1, 0)$ y $P_4(11, 4, 1)$ son coplanarios y calcular la ecuación del plano que los contiene.

Los puntos $P_1(2, 1, 1)$, $P_2(5, 2, 1)$, $P_3(9, 1, 0)$ y $P_4(11, 4, 1)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (5,\ 2,\ 1) - (2,\ 1,\ 1) = (3,\ 1,\ 0).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (9,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) = (7,\ 0,\ -1).$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (11,\ 4,\ 1) - (2,\ 1,\ 1) = (9,\ 3,\ 0).$$

Para que los puntos dados sean coplanarios el rango de los vectores $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ tiene que ser menor que tres, o sea, tiene que ser cero el valor del determinante que forman:

$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 = 3F_1\} \Rightarrow \underline{Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} = 2}.$$

Queda demostrado que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son coplanarios.

Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 determinan el plano $\pi(P_1;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$;;

$-(x-2) - 7(z-1) + 3(y-1) = 0$;; $-x + 2 - 7z + 7 + 3y - 3 = 0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 3y + 7z - 6 = 0}}$$

****

2º) Discuta el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x+6y+9z=1 \\ 3x+by+bz=1 \\ bx+y-z=1 \end{cases}$ según los valores del parámetro b. Resuelva el sistema en el caso de que sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & b & b \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & b & b & 1 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro b es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & b & b \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3b+27+6b^2-9b^2-3b+18=-3b^2-6b+45=0 \;;;\; b^2+2b-15=0 \;;;$$

$$b=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2} \Rightarrow \underline{b_1=3} \;;;\; \underline{b_2=-5}.$$

$$\underline{Para \; \begin{Bmatrix} b\neq 3 \\ b\neq -5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=3=n^{o} \; incógnitas \; \Rightarrow \; Compatible \; \det er \min ado}$$

$$Para \; b=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=3C_4\} \Rightarrow \underline{Rango \; M'=2}.$$

$$\underline{Para \; b=3 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=2<n^{o} \; incógnitas \; \Rightarrow \; Compatible \; in\det er\min ado}$$

$$Para \; b=-5 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \; M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-15+3+30-25-3-18=33-61=-28\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M'=3}.$$

$$\underline{Para \; b=-5 \; \Rightarrow \; Rango \; M=2 \;;;\; Rango \; M'=3 \; \Rightarrow \; Incompatible}$$

Resolvemos para b = 3. El sistema resulta $\begin{cases} 3x+6y+9z=1 \\ 3x+3y+3z=1 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la primera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z=\lambda$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}3x+3y=1-3\lambda\\3x+y=1+\lambda\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}3x+3y=1-3\lambda\\-3x-y=-1-\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 2y=-4\lambda\ ;;\ \underline{y=-2\lambda}\ ;;\ 3x+y=1+\lambda\ ;;$$

$$3x=1+\lambda-y=1+\lambda+2\lambda=1+3\lambda\ ;;\ \underline{x=\tfrac{1}{3}+\lambda}\ .$$

$$Solución:\ \begin{cases}x=\frac{1}{3}+\lambda\\y=-2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\ ;\ \forall\lambda\in R$$

****

3º) Determine los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x+x^2\right)-(1+x)(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{1+x+x^2-1-2x-x-2x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{-x^2-2x}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\underline{\frac{-x(x+2)}{\left(1+x+x^2\right)^2}}.$$

$$f'(x)=0\;\Rightarrow\;\frac{-x(x+2)}{\left(1+x+x^2\right)^2}=0\;;;\;-x(x+2)=0\;\Rightarrow\;\underline{x_1=0}\;;;\;\underline{x_2=-2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo y si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)\cdot\left(1+x+x^2\right)^2+x(x+2)\cdot 2\left(1+x+x^2\right)\cdot(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{(-2x-2)\cdot\left(1+x+x^2\right)+2x(x+2)(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^3}=\frac{-2x-2x^2-2x^3-2-2x-2x^2+2x\left(x+2x^2+2+4x\right)}{\left(1+x+x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-4x^2-4x-2+2x^2+2x^3+4x+8x^2}{\left(1+x+x^2\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x+x^2\right)^3}=\underline{\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x+x^2\right)^3}=f''(x)}.$$

$f''(0)=\frac{2\cdot(-1)}{(1)^3}=\frac{-2}{1}=-2<0\;\Rightarrow$ <u>Máximo relativo par x = 0</u>.

$$f(0)=\frac{1}{1}=1\;\Rightarrow\;\underline{\underline{\textit{Máximo relativo}:\;A(0,\,1)}}.$$

$f''(-2)=\frac{2\left[3\cdot(-2)^2-1\right]}{\left[1-2+(-2)^2\right]^3}=\frac{2(16-1)}{(-1+4)^3}=\frac{30}{3^3}>0\;\Rightarrow$ <u>Mínimo relativo para x = -2</u>.

$$f(-2)=\frac{1-2}{1-2+(-2)^2}=\frac{-1}{-1+4}=\underline{-\frac{1}{3}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}:\;B\left(-2,\,-\frac{1}{3}\right)}}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{1}{2x^2+4}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{1}{2x^2+4}\cdot dx=\int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}\cdot dx=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{2}}=t \\ dx=\sqrt{2}\,dt\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\sqrt{2}\cdot dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\cdot dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot arc\ tag\ t+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot arc\ tag\ \frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

$$\underline{\underline{I=\int \frac{1}{2x^2+4}\cdot dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot arc\ tag\ \frac{x}{\sqrt{2}}+C}}$$

****