PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Comprobar que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad, entonces A es inversible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?

b) Utilizar el apartado a) para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$A^2 = 2A - I \;\;;;\;\; A^2 - 2A = -I \;\;;;\;\; 2A - A^2 = I \;\;;;\;\; A \cdot (2I - A) = I.$$

Teniendo en cuenta que, por definición de inversa de una matriz, se cumple que:

$A \cdot A^{-1} = I$, de la última expresión se deduce que $\underline{\underline{A^{-1} = 2I - A}}$, que existe para cualquier matriz A de coeficientes reales.

Nota: Falsa sería la demostración siguiente:

$A^2 = 2A - I \;\;;;\;\; A \cdot A = 2A - I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot (2A - I) \;\;;;\;\; I \cdot A = 2A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot I \;\;;;\;\; A = 2I - A^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = 2I - A}.$$

Aunque se llega a una solución idéntica, se supone de antemano la existencia de la matriz inversa.

b)

En primer lugar hay que comprobar que $A^2 = 2A - I$:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}}.$$

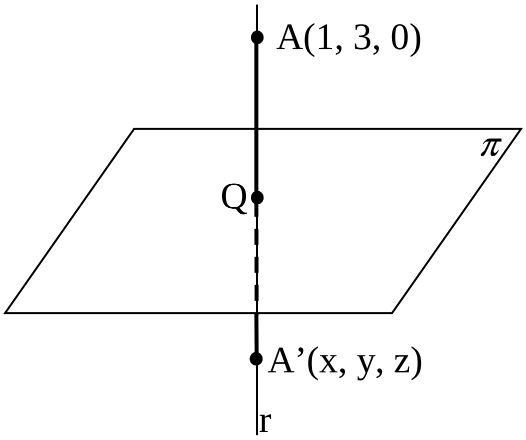
$$2A - I = 2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}}.$$

En efecto, $A^2 = 2A - I$, por lo cual será $A^{-1} = A - I$:

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Dados el punto A(1, 3, 0) y el plano $\pi \equiv x+2y+z-1=0$, determinar las coordenadas del punto A' simétrico de A con respecto al plano π. Calcular la distancia de A' al plano π.



Un vector normal de π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ 1)$.

La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director es el vector normal del plano π; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y+z-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+2(3+2\lambda)+\lambda-1=0\ ;;\ 1+\lambda+6+4\lambda+\lambda-1=0\ ;;\ 6\lambda+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lambda+1=0\ ;;\ \underline{\lambda=-1}\ \Rightarrow\ \underline{Q(0,\ 1,\ -1)}.$$

Para que A' sea el punto simétrico de A con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QA'}\ \Rightarrow\ Q-A=A'-Q\ ;;\ (0,\ 1,\ -1)-(1,\ 3,\ 0)=(x,\ y,\ z)-(0,\ 1,\ -1)\ ;;$$

$$(-1,\ -2,\ -1)=(x,\ y-1,\ z+1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x=-1} \\ y-1=-2\ \rightarrow\ \underline{y=-1} \\ z+1=-1\ \rightarrow\ \underline{z=-2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A'(-1,\ -1,\ -2)}}.$$

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x+2y+z-1=0$ y al punto A'(-1, -1, -2) :

$$d(A',\ \pi)=\frac{|1\cdot(-1)+2\cdot(-1)-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{|-1-2-3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{\sqrt{6}\ unid.=d(A',\ \pi)}}.$$

****

3º) Considera la función real definida en toda la recta real por $f(x)=\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

a) Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ dando los resultados completamente simplificados.

b) Determinar los máximos y mínimos de la función f(x).

----

a)

$$f'(x)=\frac{6x\cdot(x^2+1)^2-(3x^2-1)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{6x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{6x^3+6x-12x^3+4x}{(x^2+1)^3}=\frac{-6x^3+10x}{(x^2+1)^3}=\underline{\underline{\frac{-2x(3x^2-5)}{(x^2+1)^3}=f'(x)}}.$$

$$f''(x)=\frac{(-18x^2+10)\cdot(x^2+1)^3+2x(3x^2-5)\cdot 3\cdot(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6}=$$

$$=\frac{(-18x^2+10)\cdot(x^2+1)+12x^2(3x^2-5)}{(x^2+1)^4}=\frac{-18x^4-18x^2+10x^2+10+36x^4-60x^2}{(x^2+1)^4}=\frac{18x^4-68x^2+10}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2(9x^4-34x^2+5)}{(x^2+1)^4}=f''(x)}}.$$

b)

Una función tiene un extremo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x(3x^2-5)}{(x^2+1)^3}=0\ ;;\ -2x(3x^2-5)=0\ ;;\ x_1=0\ ;;\ 3x^2-5=0\ ;;\ 3x^2=5\ ;;$$

$$x^2=\frac{5}{3}\ ;;\ x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\Rightarrow\underline{x_2=+\frac{\sqrt{15}}{3}}\ ;;\ \underline{x_3=-\frac{\sqrt{15}}{3}}.$$

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si el valor es positivo para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativo se trata de un máximo.

$f''(0)=\frac{2(0-0+5)}{(0+1)^4}=\frac{10}{1}=10>0\Rightarrow$ <u>Mínimo relativo para x = 0.</u>

$$f(0)=\frac{3\cdot 0^2-1}{\left(0^2+1\right)^2}=\frac{-1}{1}=-1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo:\ A(0,\ -1)}}.$$

Teniendo en cuenta que f(x) es una función par, por ser $f(-x)=f(x)$, es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$f''\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)=\frac{2\cdot\left[9\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4-34\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+5\right]}{\left[\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+1\right]^4}=\frac{2\cdot\left(9\cdot\frac{25}{9}-34\cdot\frac{5}{3}+5\right)}{\left(\frac{5}{3}+1\right)^4}=\frac{2\cdot\left(25-\frac{170}{3}+5\right)}{(+)}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(30-\frac{170}{3}\right)}{(+)}=\frac{2\cdot\left(\frac{90-170}{3}\right)}{(+)}=\frac{2\cdot\frac{-80}{3}}{(+)}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximos\ \ para\ \ x=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}}.$$

$$f\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)=\frac{3\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2-1}{\left[\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+1\right]^2}=\frac{3\cdot\frac{5}{3}-1}{\left(\frac{5}{3}+1\right)^2}=\frac{5-1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{4}{\frac{64}{9}}=\frac{4\cdot 9}{64}=\frac{9}{16}\ \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Máximos\ \ relativos:\ B\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},\ \frac{9}{16}\right)\ \ y\ \ C\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\ \frac{9}{16}\right)}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$,

a) Calcular F(x) tal que $F'(x)=f(x)$ para cualquier valor de x.

b) Calcular la integral $I=\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\cdot dx$.

----

a)

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^4+1=t \\ x^3dt=\frac{1}{4}dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow F(t)=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}+C=\frac{1}{4}\cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\sqrt{t}+C \Rightarrow \underline{\underline{F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}+C}}.$$

b)

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\cdot dx=\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\sqrt{1^4+1}-\frac{1}{2}\sqrt{0^4+1}=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=I}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Sin desarrollar el determinante, comprobar que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$.

b) Determinar el rango del siguiente conjunto de vectores:

$$\left\{ \overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 0,\ -3),\ \overrightarrow{v} = (-1,\ 3,\ 1,\ 4),\ \overrightarrow{w} = (2,\ 1,\ 5,\ -1) \right\}.$$

----

a)

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

.- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1+1 \\ x & 3 & 3+1 \\ x & 5 & 5+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 3 \\ x & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

b)

El rango del conjunto de vectores dado es igual que el rango de la matriz que determinan:

$$Rango\ \left\{ \overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 0,\ -3),\ \overrightarrow{v} = (-1,\ 3,\ 1,\ 4),\ \overrightarrow{w} = (2,\ 1,\ 5,\ -1) \right\} = Rango \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz anterior es, por dimensión, < 4 y ≥ 2 por ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Vamos a ver si tiene rango 3, para lo cual es necesario que todos los determinantes de orden 3 que pueden formarse sean distintos de cero.

$$\left.\begin{array}{l}\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-4-1-10 = 15-15 = 0 \\ \\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+3-16+18-4+2 = 23-23 = 0 \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2-45+3+40 = 45-45 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango = 2}.$$

$$\underline{\underline{Rango\ \left\{\vec{u} = (1,\ -2,\ 0,\ -3),\ \vec{v} = (-1,\ 3,\ 1,\ 4),\ \vec{w} = (2,\ 1,\ 5,\ -1)\right\} = 2}}$$

Otra forma diferente de calcular el rango de los vectores es determinando si son o no linealmente independientes.

Es evidente que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, por lo cual el rango del conjunto es mayor e igual que 2.

Si los vectores $\left\{\vec{u} = (1,\ -2,\ 0,\ -3),\ \vec{v} = (-1,\ 3,\ 1,\ 4),\ \vec{w} = (2,\ 1,\ 5,\ -1)\right\}$ son linealmente dependientes tiene que cumplirse que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$, siendo $\alpha,\ \beta \in R$.

$$(1,\ -2,\ 0,\ -3) = \alpha \cdot (-1,\ 3,\ 1,\ 4) + \beta \cdot (2,\ 1,\ 5,\ -1) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 5\beta = 0 \\ 4\alpha - \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow\ 7\beta = 1\ ;;\ \underline{\beta = \frac{1}{7}}\ ;;$$

$$\alpha = -5\beta = \underline{-\frac{5}{7} = \alpha}\ \Rightarrow\ \underline{\vec{u} = -\frac{5}{7}\vec{v} + \frac{1}{7}\vec{w}}.$$

Los vectores $\left\{\vec{u} = (1,\ -2,\ 0,\ -3),\ \vec{v} = (-1,\ 3,\ 1,\ 4),\ \vec{w} = (2,\ 1,\ 5,\ -1)\right\}$ son linealmente dependientes y su rango es 2, como esperábamos.

****

2º) Determinar la ecuación del plano π que pasa por los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 2, 0) y corta al eje OZ en el punto C(0, 0, c) con c > 0 tal que el área del triángulo ABC vale $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, c) determinan los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 2,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ c)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 0,\ c).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S=\sqrt{6}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|2ci+2k+cj\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|2ci+cj+2k\right|=\sqrt{6}\ ;;$$

$$\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2c)^2+c^2+2^2}\ ;;\ 2\sqrt{6}=\sqrt{4c^2+c^2+4}=\sqrt{5c^2+4}\ ;;\ 24=5c^2+4\ ;;\ 20=5c^2\ ;;\ c^2=4\ ;;.$$

$c=\pm\sqrt{4}=\pm2\ \Rightarrow$ Como tiene que ser c > 0, la solución es <u>c = 2</u>.

Son vectores directores del plano π pedido $\overrightarrow{u}=(-1,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,\ 0,\ 2)$. Considerando, por ejemplo, el punto A(1, 0, 0), la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 4(x-1)+2z+2y=0\ ;;\ 2(x-1)+z+y=0\ ;;$$

$$2x-2+y+z=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi\equiv 2x+y+z-2=0}}.$$

****

3º) Considere la ecuación $x^3+\lambda x^2-2x=1$ siendo λ una constante mayor que 2. Usando los teoremas de Bolzano y Rolle, probar que la ecuación admite una única solución no negativa y más pequeña que 1.

Se considera la función $f(x)=x^3+\lambda x^2-2x-1$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo cual, lo será en cualquier intervalo real que se considere.

El teorema de Bolzano dice que “si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$”.

Teniendo en cuenta que $f(0)=-1<0\ \ y\ \ f(1)=1+\lambda-2-1>0$, por ser λ > 2, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función f(x) tiene, al menos, una raíz $x=\alpha$, teniendo que ser 0 < α <1, valor no negativo y menor que 1, y tal que f(α) = 0.

Vamos a demostrar ahora que la raíz es única.

Supongamos que existe otra "d", tal que 0 < α < d < 1. Aplicamos Rolle en (α, d)

Como f(x) es una función continua en el intervalo [α, d] y derivable en (α,d) y se cumple que f(α) = f(d) = 0, existe al menos un punto c de (α,d) que está incluido en (0,1) tal que f'(c) = 0”.

$$f'(x)=3x^2+2\lambda x-2=0\ ;;\ x=\frac{-2\lambda\pm\sqrt{4\lambda^2+24}}{6}=\frac{-2\lambda\pm2\sqrt{\lambda^2+6}}{6}=\frac{-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+6}}{3}=$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2+6}}{3}<0\ ;;\ x_2=\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2+6}}{3}>0.$$

Tomando las soluciones de f '(x) e igualándolas a cero (puesto que tiene que existir un número c de (α,d) que está incluido en (0,1) tal que f'(c) = 0), tenemos :

$\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2+6}}{3}=0$ y $\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2+6}}{3}=0$, es decir $-\lambda=\pm\sqrt{\lambda^2+6}$, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos $\lambda^2=\lambda^2+6$, de donde 0 = 6, es decir tenemos que 0 = 6, lo cual es absurdo. Este absurdo viene de suponer que hay otra solución en el intervalo (0,1).

****

4º) Sea $I=\int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\cdot dx$:

a) Expresar I aplicando el cambio de variable $x=t^2$.

b) Calcula el valor de I.

----

a)

$$I=\int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c|c} x=t^2 \to \sqrt{x}=t & x=1 \to t=1 \\ dx=2tdt & x=0 \to t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{2}{3+t}\cdot 2tdt = \underline{\underline{4\int_0^1 \frac{t}{3+t}\cdot dt = I}} .$$

b)

$$I=4\int_0^1 \frac{3+t-3}{3+t}\cdot dt = 4\int_0^1 \left(1-\frac{3}{3+t}\right)\cdot dt = 4\int_0^1 dt - 12\int_0^1 \frac{1}{3+t}\cdot dt = 4\cdot [t]_0^1 - 12I_1 = 4\cdot(1-0)-12I_1 =$$

$$= \underline{4-12I_1 = I} . \quad (*)$$

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{3+t}\cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c|c} 3+x=u & x=1 \to u=4 \\ dx=du & x=0 \to u=3 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int_3^4 \frac{1}{u}\cdot du = [Lu]_3^4 = \underline{L4-L3=I_1} .$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*):

$$\underline{\underline{I=4-12(L4-L3)}}$$

****