PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1º) Dado el sistema $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ -mx+2y+z=2 \end{cases}$, dependiente del parámetro m.

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $m=2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -m & 2 & 1 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -m & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Para\; m=-3 \Rightarrow Rang\; A=1; Rang\; A'=2 \Rightarrow Sistema\; incompatible.}$$

$$\underline{Para\; m\neq -3 \Rightarrow Rang\; A=Rang\; A'<nº\; incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $m=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=1 \\ -2x+2y+z=2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución hacemos $y=\lambda$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+z=1-2\lambda \\ -2x+z=2-2\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+z=1-2\lambda \\ 2x-z=-2+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=-1;\;\; x=-\tfrac{1}{5}.$$

$z=1-2\lambda+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}-2\lambda.$

$\underline{Solución: x = -\frac{1}{5}, y = \lambda, z = \frac{8}{5} - 2\lambda, \forall\lambda \in R.}$

****

2º) Dadas la matrices $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$.

$a)$ Encuentre los valores de k para los cuales Y es invertible.

$b)$ Encuentre la inversa de Y para $k=1$.

$c)$ Determine los valores de m y n para los cuales la matriz X satisface la ecuación matricial $X^2-4X+nI=O$, donde I es la matriz identidad y $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}=-k-4=0 \Rightarrow k+4=0 \Rightarrow k=-4.$$

$$\underline{Y \text{ es invertible } \forall k \in R-\{-4\}}.$$

$b)$

$$Para\ k=1 \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\ |Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5;\ Y^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.\,de\ Y^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad Y^{-1}=\frac{Adj.de\ Y^t}{|Y|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-5} \Rightarrow \underline{Y^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$X^2-4X+nI=O \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m^2-4m+n=0 \\ 9-12+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{n=3}.$$

$$m^2-4m+3=0;\ m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=2\pm1 \Rightarrow \underline{m_1=1;\ m_2=3}.$$

****

3º) El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 de chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chiches y dos bombones y se venderá a 1,5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal.

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de paquetes de los tipos que prepara y vende el dueño de la tienda de chucherías, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y \leq 10 \\ 2x+4y \leq 30 \\ 2x+y \leq 18 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y \leq 10 \\ x+2y \leq 15 \\ 2x+y \leq 18 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

b)

① $\Rightarrow x+y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	10	0

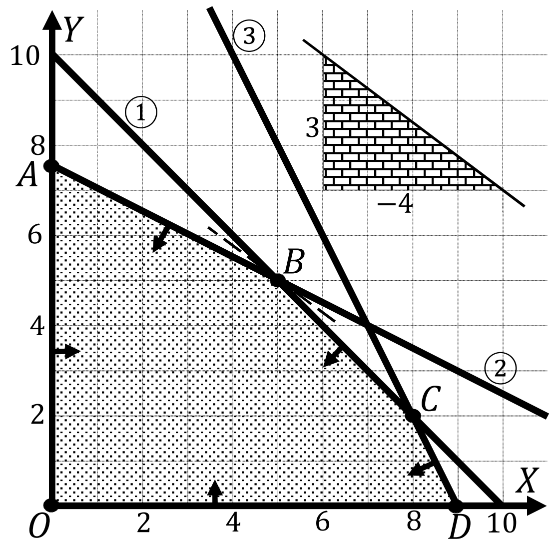
② $\Rightarrow x+2y \leq 15 \Rightarrow y \leq \frac{15-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	5	7
y	5	4

③ $\Rightarrow 2x+y \leq 18 \Rightarrow y \leq 18-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	9	5
y	0	8

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=15;$

$y=7{,}5 \Rightarrow \underline{A(0;\ 7{,}5)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x+2y=15 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-10 \\ x+2y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=5;\ \ x=5 \Rightarrow \underline{B(5,5)}.$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ 2x+y=18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x-y=-10 \\ 2x+y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow x=8;\ \ y=2 \Rightarrow \underline{C(8,2)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=18;\ \ x=9 \Rightarrow \underline{D(9,0)}.$$

$c)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=1{,}5x+2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0;\ 7{,}5)=1{,}5\cdot 0+2\cdot 7{,}5=0+15=15.$$

$$A \Rightarrow f(5,5)=1{,}5\cdot 5+2\cdot 5=7{,}5+10=17{,}5.$$

$$C \Rightarrow f(8,2)=1{,}5\cdot 8+2\cdot 2=12+4=16.$$

$$D \Rightarrow f(9,0)=1{,}5\cdot 9+2\cdot 0=13{,}5+0=13{,}5.$$

El máximo se produce en el punto $B(5,5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=1{,}5x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{1{,}5}{2}x=-\frac{3}{4}x \Rightarrow m=-\frac{3}{4}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 5\ paquetes\ de\ cada\ tipo}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 17{,}5\ euros}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$.

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Encuentre una primitiva de $f(x)$.

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x = 4, x = 7$ e $y = 0$.

----

a)

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{-(x+3)+x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{-x-3+x-1}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow f(x) = \frac{-4}{(x-1)(x+3)} = \frac{-4}{x^2+2x+3}.$$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$(x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{-3, 1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{+4\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{8\cdot(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8\cdot(x+1)}{(x^2+2x+3)^2} = 0 \Rightarrow 8(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0;\ \ x = -1.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de la derivada es siempre positivo, la derivada será positiva o negativa cuando lo sea el numerador, por lo cual, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)}.$$

b)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}\right)\cdot dx = -L|x-1| + L|x+3| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{F(x) = L\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C}.$$

c)

Teniendo en cuenta la expresión de la función $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+3}$, en el intervalo de la superficie a calcular, $(4, 7)$, todas las ordenadas de la función son negativas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_7^4 f(x) \cdot dx = \left[L\left|\frac{x+3}{x-1}\right|\right]_7^4 = L\,\frac{4+3}{4-1} - L\,\frac{7+3}{7-1} = L\,\frac{7}{3} - L\,\frac{10}{6} = L\,\frac{7}{3} - L\,\frac{5}{3} =$$

$$= L\left(\frac{7}{3} : \frac{5}{3}\right) = L\,\frac{7}{5} \Rightarrow \underline{S = L1{,}4\ u^2 \cong 0{,}336\ u^2}.$$

****

5º) Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierde (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota.

b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes?

c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia?

----

a)

Siendo x la cuota que abonan los estudiantes, la función "número de estudiantes en función de la cuota" es lineal: $E(x) = mx + n$.

Para determinar lo valores de m y n tenemos en cuenta que $E(50) = 200$ y, por ejemplo, disminuyendo la cuota 2 euros aumentan los alumnos en 10: $E(48) = 210$.

$$\left.\begin{array}{l} E(50) = 200 \Rightarrow 50m + n = 200 \\ E(48) = 210 \Rightarrow 48m + n = 210 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 50m + n = 200 \\ -48m - n = -210 \end{array}\right\} \Rightarrow 2m = -10;$$

$m = -5$; $-250 + n = 200$; $n = 450 \Rightarrow \underline{E(x) = -5x + 450}$.

b)

$E(x) = 0 \Rightarrow -5x + 450 = 0$; $-x + 90 = 0 \Rightarrow x = 90$.

$\underline{La\ academia\ no\ tendría\ alumnos\ con\ una\ cuota\ mensual\ de\ 90\ euros}$.

c)

La función ingresos, $I(x)$, se obtiene teniendo en cuenta que:

$Ingresos = Número\ alumnos \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(x) = (-5x + 450) \cdot x \Rightarrow I(x) = -5x^2 + 450x.$

Por ser la función ingresos una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, su máximo es el valor que anula su primera derivada:

$f'(x) = -10x + 450 = 0$; $-x + 45 = 0 \Rightarrow x = 45$.

$\underline{El\ ingreso\ mensual\ es\ máximo\ con\ una\ cuota\ de\ 45\ euros}$.

$I(45) = -5 \cdot 45^2 + 450 \cdot 45 = -10.125 + 20.250 = 10.125.$

$$\underline{El\ ingreso\ mensual\ máximo\ es\ de\ 10.125\ euros}.$$

****

6º) La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función $P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40, t\geq 0$, donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t=0$).

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito.

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para ese máximo.

----

a)

$$P(0)=\frac{20\cdot 0}{4+0^2}+40=\frac{0}{4}+40=0+40=40.$$

$$\underline{La\ población\ actual\ del\ Estado\ es\ de\ 40\ millones\ de\ habitantes}.$$

b)

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{20t}{4+t^2}+40\right)=0+40\Rightarrow \underline{\lim_{t\to\infty}P(t)=40}.$$

c)

Para que una función tenga un máximo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(t)=\frac{20\cdot(4+t^2)-20t\cdot 2t}{(4+t^2)^2}+0=\frac{80+20t^2-40t^2}{(4+t^2)^2}=\frac{80-20t^2}{(4+t^2)^2}.$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{80-20t^2}{(4+t^2)^2}=0;\ \ 80-20t^2=0;\ \ 4-t^2=0\Rightarrow t_1=-2, t_2=2.$$

La solución negativa carece de sentido, por lo cual, la solución es $t=2$.

Se justifica a continuación de que se trata de un máximo.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(t)=\frac{-40t\cdot(4+t^2)^2-(80-20t^2)\cdot[2\cdot(4+t^2)\cdot 2t]}{(4+t^2)^4}=\frac{-40t\cdot(4+t^2)-4t\cdot(80-20t^2)}{(4+t^2)^3}=$$

$$=\frac{-160t-40t^3-320t+80t^3}{(4+t^2)^3}=\frac{40t^3-480t}{(4+t^2)^3}\Rightarrow P''(t)=\frac{40t\cdot(t^2-12)}{(4+t^2)^3}.$$

$$P''(2)=\frac{40\cdot 2\cdot(2^2-12)}{(4+2^2)^3}=\frac{80\cdot(-8)}{8^3}<0\Rightarrow Máx.\,como\ se\ quería\ justificar.$$

$\underline{La\ población\ del\ Estado\ es\ máxima\ a\ los\ dos\ años}.$

$P(2) = \frac{20 \cdot 2}{4+2^2} + 40 = \frac{40}{8} + 40 = 45.$

$\underline{La\ población\ máxima\ del\ Estado\ es\ de\ 45\ millones\ de\ habitantes}.$

****

7º) En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5{,}1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1{,}6$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos?

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5,9?

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos?

----

a)

$Datos$: $\mu = 5{,}1; \;\; \sigma = 1{,}6.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(5{,}1; 1{,}6).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}1}{1{,}6}.$

$$P = P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-5{,}1}{1{,}6}\right) = P\left(Z < \frac{-1{,}1}{1{,}6}\right) \cong P(Z < -0{,}69) =$$

$$= P(Z \geq 0{,}69) = 1 - P(Z \leq 0{,}69) = 1 - 0{,}7549 = \underline{0{,}2450}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 5{,}1; \;\; \sigma = 1{,}6; \;\; n = 64.$

$$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}1;\ \frac{1{,}6}{\sqrt{64}}\right) = N(5{,}1;\ 0{,}2). \quad Z = \frac{X-5{,}1}{0{,}2}.$$

$$P = P(X > 5{,}9) = P\left(Z > \frac{5{,}9-5{,}1}{0{,}2}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}8}{0{,}2}\right) = P(Z > 4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 4) = 1 - 0{,}9999 \cong \underline{0}.$$

c)

El número de alumnos que se espera que tengan una nota inferior a 4 puntos es la siguiente: $N = n \cdot P = 50 \cdot 0{,}2450 = 12{,}25 \Rightarrow 12.$

$$\underline{Se\ espera\ que\ en\ aula\ haya\ 38\ alumnos\ con\ nota\ superior\ a\ 4\ puntos.}$$

****

8º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(B/A) = 0{,}9;\ \ P(A/B) = 0{,}2;\ \ P(A) = 0{,}1$.

a) Calcule $P(A \cap B)\ y\ P(B)$.

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

c) Calcule $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

----

a)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}9 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}9 \cdot P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cap B) = 0{,}09}.$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}2 \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0{,}2} = \frac{0{,}09}{0{,}2} \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}45}.$$

b)

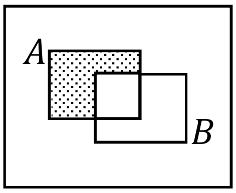
Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}09 \neq 0{,}1 \cdot 0{,}45 \Rightarrow \underline{A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$$

c)

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= 0{,}1 - 0{,}09 \Rightarrow \underline{P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}01}.$$



$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$

****