PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1º) El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1.000 kg y cada camión, 9.000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300.000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de automóviles y de camiones que se almacenan en la bodega del barco, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y\leq 200 \\ 1.000x+9.000y\leq 300.000 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+4y\leq 200 \\ x+9y\leq 300 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

b)

$① \Rightarrow x+4y\leq 200 \Rightarrow y\leq \frac{200-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	200	0
y	0	50

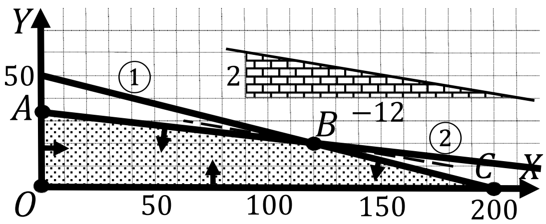
$② \Rightarrow x+9y\leq 300 \Rightarrow y\leq \frac{300-x}{9} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	120	30
y	20	30

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 9y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{100}{3} \Rightarrow A\left(0, \frac{100}{3}\right).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y = 200 \\ x + 9y = 300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - 4y = -200 \\ x + 9y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 100;\ \ y = 20;\ \ x + 80 = 200;\ \ x = 120 \Rightarrow B(120, 20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + 4y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 200 \Rightarrow C(200, 0).$

$c)$

La función de objetivos es $f(x, y) = 50x + 300y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f\left(0, \frac{100}{3}\right) = 50 \cdot 0 + 300 \cdot \frac{100}{3} = 0 + 10.000 = 10.000.$

$B \Rightarrow f(120, 20) = 50 \cdot 120 + 300 \cdot 20 = 6.000 + 6.000 = 12.000.$

$C \Rightarrow f(200, 0) = 50 \cdot 200 + 300 \cdot 0 = 10.000 + 0 = 10.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(120, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 50x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{300}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{2}{12}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ cargando\ 120\ automóviles\ y\ 20\ camiones.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 12.000\ euros.}$

****

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2.

b) Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{Soluciones: \begin{cases} a_1 = 1; \;\; b_1 = -1; \;\; c_1 = 1 \\ a_2 = -1; \;\; b_2 = 1; \;\; c_2 = -1 \end{cases}}.$$

****

3º) En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Idendifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

----

a)

Sean x, y, z el número de unidades de naranjas, aguacates y piñas que se compran en la tienda, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 0{,}5\cdot x+1\cdot y+1{,}5\cdot z=68 \\ 1\cdot x+0{,}5\cdot y+1{,}5z=64 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ 2x+y+3z=128 \end{array}\right\}.$$

b)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow 3z = 54;\ \ z = 18.\ \ \ y + 2z = 66;$$

$$y + 36 = 66 \Rightarrow y = 30. \quad\ x + 30 + 18 = 70 \Rightarrow x = 22.$$

$$\underline{\mathit{Hemos\ comprado\ } 22 \mathit{\ naranjas}, 30 \mathit{\ aguacates\ y\ } 18 \mathit{\ piñas}.}$$

****

4º) Consideramos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x = 1$?

c) Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = -2$ y $x = 1$ cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (-4x + a) = a + 8 = f(-2) \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 5) = 4 - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) \Rightarrow a + 8 = -1 \Rightarrow a = -9.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = -2\ para\ a = -8.}$$

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad para $x = 1$ se estudia su continuidad.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5) = 1 - 5 = -4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-7x + 3) = -7 + 3 = -4 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & si \quad x \leq -2 \\ 2x & si \quad -2 < x < 1 \\ -7 & si \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Para $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f'(1^+) = -7 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$

$$\underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 1}.$$

$c)$

Para $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} -4x & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \ -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ y su función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -4 & si \quad x \leq -2 \\ 2x & si \ -2 < x < 1 \\ -7 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la derivada se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0, 1)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)}.$$

****

5º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

$a)$

$$P(0) = \frac{2+0+0^2}{0^2+2\cdot 0+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\underline{La\ población\ inicial\ era\ de\ 2.000.000\ individuos.}$$

$$P(5) = \frac{2+5+5^2}{5^2+2\cdot 5+1} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} = 0{,}888888.$$

$$\underline{Después\ de\ 5\ años\ la\ población\ era\ de\ 888.888\ individuos.}$$

$b)$

$$P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} < 1;\ \ 2+t+t^2 < t^2+2t+1;\ \ 1 < t.$$

$$\underline{La\ población\ es\ menor\ de\ un\ millón\ de\ individuos\ a\ partir\ de\ un\ año.}$$

$c)$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} = 1.$$

$$\underline{Con\ el\ tiempo\ la\ población\ se\ estabiliza\ en\ un\ millón\ de\ individuos.}$$

****

6º) Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$a)$ Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$b)$ Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

$c)$ Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$.

$a)$

La pendiente de la recta $3x + 4y + 5 = 0$ es $m = -\frac{3}{4}$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}. \qquad m = f'(x) \Rightarrow -\frac{3}{4} = -\frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 = 4;\;\; x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(-2) = \frac{3}{-2} + 8 = \frac{13}{2} \Rightarrow \underline{T_1\left(-2, \frac{13}{2}\right)}. \qquad f(2) = \frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2} \Rightarrow \underline{T_2\left(2, \frac{19}{2}\right)}.$$

$b)$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - \frac{13}{2} = -\frac{3}{4} \cdot (x + 2);\;\; 4y - 26 = -3x - 6 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 3x + 4y - 20 = 0}.$$

$$y - \frac{19}{2} = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2);\;\; 4y - 38 = -3x + 6 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 3x + 4y - 44 = 0}.$$

$c)$

En el intervalo de la superficie a calcular, $(2, 4)$, todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{3}{x} + 8$ son positivas, por lo cual:

$$S = \int_2^4 f(x) \cdot dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{x} + 8\right) \cdot dx = [3Lx + 8x]_2^4 =$$

$$= (3L4 + 8 \cdot 4) - (3L2 + 8 \cdot 2) = 6L2 + 32 - 3L2 - 16 = 3L2 + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S = (3L2 + 16)\, u^2 \cong 18{,}08\, u^2}.$$

****

7º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la poblsción.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=256;\ \overline{x}=17{,}4;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(17{,}4-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}};\ 17{,}4+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}}\right);$

$(17{,}4-1{,}96\cdot 0{,}125;\ 17{,}4+1{,}96\cdot 0{,}125);\ \ (17{,}4-0{,}245;\ 17{,}4+0{,}245).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(17{,}155;\ 17{,}645)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha=0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$
$(1-0{,}04=0{,}9600 \ \rightarrow z=1{,}75).$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\ E=0{,}5;\ \sigma=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{2}{0{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4)^2=7^2=49.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 50\ individuos}.$$

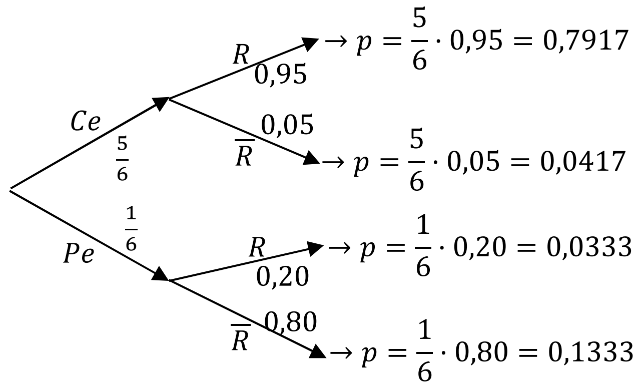
****

8º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 1.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?



a)

$$P = P(R) = P(Ce \cap R) + P(Pe \cap R) =$$

$$= P(Ce) \cdot P(R/Ce) + P(Pe) \cdot P(R/Pe) = \frac{5}{6} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}20 = 0{,}7917 + 0{,}0333 =$$

$$= \underline{0{,}8250}.$$

b)

$$P = P(Ce \cap R) = P(Ce) \cdot P(R/Ce) = \frac{5}{6} \cdot 0{,}95 = \underline{0{,}7917}.$$

c)

$$P = P(Ce/R) = \frac{P(Ce \cap R)}{P(R)} = \frac{P(Ce) \cdot P(R/Ce)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 0{,}95}{0{,}8250} = \frac{0{,}7917}{0{,}8250} = \underline{0{,}9596}.$$

La resolución del ejercicio mediante una tabla de contingencias es la siguiente:

	Centro	Periferia	Total
Residentes	5.000	1.000	6.000
A favor	4.750	200	4.950
En contra	250	800	1.050

Aplicando la regla de Laplace:

$a)$

$$P=\frac{A\ favor}{Total}=\frac{4.950}{6.000}=\underline{0{,}8250}.$$

$b)$

$$P=\frac{A\ favor\ del\ centro}{Total}=\frac{4.750}{6.000}=\underline{0{,}7917}.$$

$c)$

$$P=\frac{Del\ centro}{A\ favor}=\frac{4.750}{4.950}=\underline{0{,}9596}.$$

****