PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las dos opciones, A o B, propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadoras de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que puedan almacenar o transferir información.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\}$:

a) Discute el sistema en función del parámetro a.

b) Resuélvalo para $a=-2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix}=2-a(a+1)=2-a^2-a=0;\ \ a^2+a-2=0;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow a_1=-2, a_2=1.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -2 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Se resuelve para $a = -2$. El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array}\right\}$, equivalente a la ecuación $x - y = 1$.

$$\underline{Solución: x = 1 + \lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) En una empresa puede producir hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación al número q de mesas producidas es $C(q) = \frac{1}{50}q^3 + 8q + 40$. Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a) Calcula el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20?

b) Determina cuántas mesas debe producir para que el coste medio sea mínimo. Justifica que se trata efectivamente de un mínimo y calcula este coste mínimo.

----

a)

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{1}{50}q^3+8q+40}{q} = \frac{1}{50}q^2 + 8 + \frac{40}{q}.$$

$$Q(5) = \frac{1}{50} \cdot 5^2 + 8 + \frac{40}{5} = \frac{25}{50} + 8 + 8 = 16 + \frac{1}{2} = 16{,}5.$$

$$\underline{El\ precio\ medio\ unitario\ si\ se\ producen\ 5\ mesas\ es\ 16{,}5\ euros}.$$

$$Q(20) = \frac{1}{50} \cdot 20^2 + 8 + \frac{40}{20} = \frac{400}{50} + 8 + 2 = 8 + 10 = 18.$$

$$\underline{El\ precio\ medio\ unitario\ si\ se\ producen\ 20\ mesas\ es\ 18\ euros}.$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$Q'(q) = \frac{q}{25} + 0 - \frac{40}{q^2} \Rightarrow \frac{q}{25} = \frac{40}{q^2};\ \ q^3 = 25 \cdot 40 = 1.000 = 10^3 \Rightarrow q = 10.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$Q''(q) = \frac{1}{25} - \frac{-40 \cdot 2q}{q^4} = \frac{1}{25} + \frac{80}{q^3}.$$

$$Q''(10) = \frac{1}{25} + \frac{80}{10^3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ q = 10}.$$

$$Q(10) = \frac{1}{50} \cdot 10^2 + 8 + \frac{40}{10} = \frac{100}{50} + 8 + 4 = 2 + 12 = 14.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ de\ fabricación\ de\ una\ mesa\ es\ de\ 14\ euros}.$$

****

3º) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - a, \forall a \in R$.

a) Hallar los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$.

b) Para $a = 3$, dibuja el recinto formado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, identificando sus puntos de intersección.

c) Para $a = 3$, calcula el área del recinto anterior.

----

a)

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 5 = x^2 - a;\ 2x^2 = a + 5;\ x^2 = \frac{a+5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+5}{2}} \Rightarrow$$

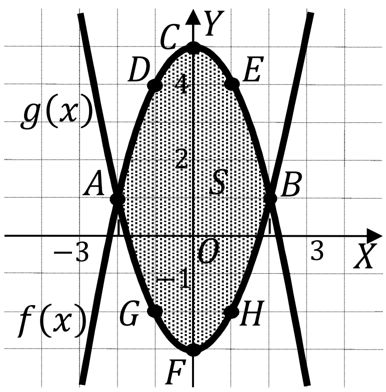
$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{a+5}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{a+5}{2}}.$$

b)

Para $a = 3$ es $g(x) = x^2 - 3$ y los puntos de corte son los siguientes:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3+5}{2}} = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow \underline{A(-2, 1)}. \quad x_2 = \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \underline{B(2, 1)}.$$

La función $f(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $C(0, 5)$. Otros puntos de la parábola son $D(-1, 4)$ y $E(1, 4)$.



La función $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $F(0, -3)$. Otros puntos de la parábola son $G(-1, -2)$ y $H(1, -2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

c)

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-2, 2)$, todas las ordenadas de $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$; por otra parte, las dos funciones son pares, es decir, simétricas con respecto al eje de ordenadas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [(5 - x^2) - (x^2 - 3)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (5 - x^2 - x^2 + 3) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{16}{3} + 16\right) = 32 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 32 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{64}{3}\ u^2 = 21{,}33\ u^2.}$$

****

4º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media con un nivel de confianza del 99 %, si el error cometido debe ser inferior a 0,5 años?

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=256;\ \overline{x}=17{,}4;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(17{,}4-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}};\ 17{,}4+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}}\right);$$

$(17{,}4-1{,}96\cdot 0{,}125;\ 17{,}4+1{,}96\cdot 0{,}125);\ \ (17{,}4-0{,}245;\ 17{,}4+0{,}245).$

$$\underline{I.C._{99\,\%}=(17{,}155;\ 17{,}645).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ E=0{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{2}{0{,}5}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 4)^2=10{,}3^2=106{,}09.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 107\ individuos.}$

****

OPCIÓN B

1º) Un trayecto de 600 km se ha de hacer combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0,5 euros/km; el del ferrocarril, de 0,2 euros/km, y el del autobús, es 0,1 euros/km. El recorrido cuesta 150 euros, y se sabe que se hace el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determina las distancias que se han de recorrer con cada tipo de transporte.

Sean x, y, z los kilómetros que se recorren en taxi, ferrocarril y autobús, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 0{,}5\,x+0{,}2y+0{,}1z=150 \\ y=2\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 5x+2y+z=1.500 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 1.500 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{2.400-1.500+600-3.000}{4-5+2-4+1-10}=\frac{-1.500}{-12}=125.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 5 & 1.500 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{3.000+1.200-3.000-6.000}{-12}=\frac{1.200-6.000}{-12}=\frac{-4.800}{-12}=400.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 5 & 2 & 1.500 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-3.000+3.000-2.400+1500}{-12}=\frac{1.500-2.400}{-12}=\frac{-900}{-12}=75.$$

$\underline{Se\ recorrieron\ 125\ km\ en\ taxi, 400\ en\ ferrocarril\ y\ 75\ en\ autob\text{ú}s.}$

****

2º) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de manteca para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan cada día 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de manteca y para hacer una hornada de tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de manteca. Se sabe que el beneficio que se obtiene cada día es de 20 euros con los pasteles de tipo A y 30 euros con los de tipo B.

a) Plantea la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Determina cuantas hornadas de cada tipo ha de hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determina también cuál es este beneficio.

----

a)

Sean x e y el número hornadas diarias que realiza el pastelero, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 150 \\ x+0{,}5y\le 22 \\ x+y\le 26 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 50 \\ 2x+y\le 44 \\ x+y\le 26 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b)

① $\Rightarrow x+2y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	25	0

② $\Rightarrow 2x+y\le 44 \Rightarrow y\le 44-2x \to O(0,0)\to Si.$

x	0	22
y	44	0

③ $\Rightarrow x+y\le 26 \Rightarrow y\le 26-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	26
y	26	0

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

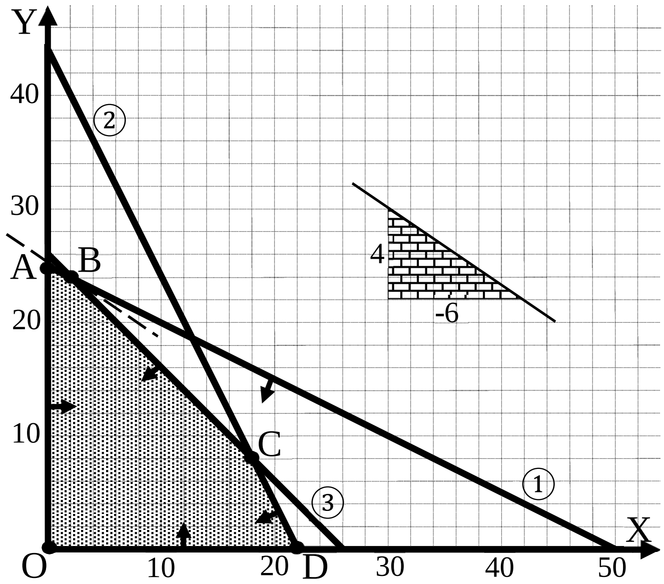
$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,25).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ x+y=26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ -x-y=-26 \end{array}\right\} \Rightarrow y=24 \Rightarrow x+24=26;\; x=2 \Rightarrow B(2,24).$$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=44 \\ x+y=26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=44 \\ -x-y=-26 \end{array}\right\} \Rightarrow x=18; 18+y=26;\; y=8 \Rightarrow B(18,8).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 2x + y = 44 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 44;\;\; x = 22 \Rightarrow D(22;\; 0).$$

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.



$c)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 20x + 30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,25) =$

$= 20 \cdot 0 + 30 \cdot 25 = 0 + 750 = 750.$

$B \Rightarrow f(2,24) = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 24 = 40 + 720 = 760.$

$C \Rightarrow f(18,8) = 20 \cdot 18 + 30 \cdot 8 = 360 + 240 = 600.$

$D \Rightarrow f(22;0) = 20 \cdot 22 + 30 \cdot 0 = 440 + 0 = 440.$

El máximo se produce en el punto $B(2,24)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 20x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{30}x = -\frac{4}{6}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ fabricando\ 2\ hornadas\ de\ A\ y\ 24\ de\ B}$.

$\underline{La\ recaudación\ máxima\ es\ de\ 760\ euros}$.

****

3º) Considera la función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

a) Determina el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razona si te trata de un máximo o de un mínimo.

b) En el supuesto de que $b = 1$, hallar una primitiva de $f'(x)$.

c) Utiliza la primitiva anterior para hallar $f(x)$ para $b = 1$ tal que $f(2) = -1$.

----

a)

Por tener un extremo relativo para $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + b \cdot (-1) + 4 = 0;\ -1 - b + 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 3}$.

Para $b = 3 \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3x + 4$.

$f''(x) = 3x^2 + 3$. $\quad f''(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 3 = 3 + 3 > 0 \Rightarrow Mín.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ para\ x = -1.}$$

b)

Para $b = 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + x + 4$.

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^3 + x + 4) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

$$\underline{Todas\ las\ primitivas\ de\ f'(x)\ son\ f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C, C \in R.}$$

c)

$f(2) = -1 \Rightarrow \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 + C = -1;\ \ 4 + 2 + 8 + C = -1 \Rightarrow C = -15$.

$$\underline{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x - 15.}$$

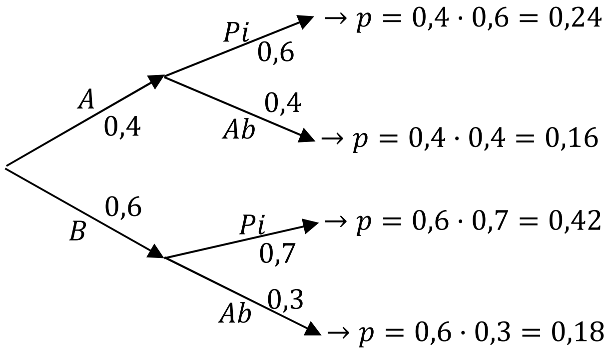
****

4º) Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40 % de las aceitunas las provee la productora A, de las cuales el 60 % son de la variedad picual. De las que proceden de la productora B, el 30 % son de la variedad arbequina. Se coge una caja de aceitunas al azar:

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?

c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?



a)

$$P = P(Pi) = P(A \cap Pi) + P(B \cap Pi) = P(A) \cdot P(Pi/A) + P(B) \cdot P(Pi/B) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}24 + 0{,}42 = \underline{0{,}66}.$$

b)

$$P = P(A/Pi) = \frac{P(A \cap Pi)}{P(Pi)} = \frac{P(A) \cdot P(Pi/A)}{P(Pi)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}66} = \frac{0{,}24}{0{,}66} = \underline{0{,}3636}.$$

****