

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDADES DE BALEARES****JUNIO – 2017**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes del tipo A los vende a 300 euros; los del tipo B, a 600 euros, y los del tipo C, a 200 euros. En un mes determinado ha vendido 200 relojes en total. Si la cantidad de los relojes que ha vendido ese mes de tipo B ha sido igual a la suma de los relojes de los tipos B y C, calcule cuantos relojes vendió de cada tipo si la recaudación total fue de 89.000 euros.

Sean x, y, z los relojes que vende el comerciante de los tipos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 300x + 600y + 200z = 89.000 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 890 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 890 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-400+890+890-1.200}{-2+6+3+3-6-2} = \frac{1.780-1.600}{2} = \frac{180}{2} = 90.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 890 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{890+600-890-400}{2} = \frac{200}{2} = 100.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 890 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-890+1.200+600-890}{2} = \frac{1.800-1.780}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

El comerciante vendió 90 relojes tipo A, 100 tipo B y 10 tipo C.

2º) Una empresa de compraventa de automóviles ha comprobado que en los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función $F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$, con $0 \leq t \leq 10$, en miles de euros. Se pide:

a) ¿En qué años se produjeron los valores máximo y mínimo de esta función?

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuáles son los beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa el último año?

a)

Para que una función polinómica tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81.$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0; \quad t^2 - 12t + 27 = 0; \quad t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \\ = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 9.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$F''(t) = 6t - 36 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \rightarrow F''(3) = 6 \cdot 3 - 36 = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ t_2 = 9 \rightarrow F''(9) = 6 \cdot 9 - 36 = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}.$$

El máximo se produjo el tercer año y el mínimo el noveno año.

b)

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y el máximo y mínimo obtenidos en el apartado anterior, pueden deducirse los periodos de crecimiento y decrecimiento; no obstante, se determinan por la primera derivada.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Las raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función en los intervalos $(0, 3)$, $(3, 9)$ y $(9, 10)$, en los cuales, el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $1 \in (0, 3)$:

$$F'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 3 - 36 + 81 = 48 > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son

los siguientes:

$$\underline{\text{Crecimiento: } F'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 3) \cup (9, 10).}$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } F'(t) < 0 \Rightarrow t \in (3, 9).}$$

c) ¿Cuáles son los beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa el último año?

$$F(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 2 = 27 - 162 + 243 - 3 = 105.$$

Los beneficios máximos fueron de 105.000 euros.

$$F(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 1.000 - 1.800 + 810 - 3 = 7.$$

Los beneficios del último año fueron de 7.000 euros.

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A^c) = 0,4$, siendo A^c el suceso complementario de A, y $P(A \cap B) = 0,2$. Calcule las probabilidades siguientes:

$P(B)$; $P(A/B)$; $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cup B^c)$.

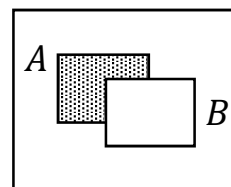
$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

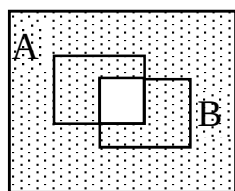
$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,9 - 0,6 + 0,2 = \underline{0,5}.$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = \underline{0,4}.$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = \underline{0,4}.$$



$$A \cap B^c = A - (A \cap B)$$



$$A^c \cup B^c$$

$$\Rightarrow P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = \underline{0,8}.$$

4º) A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza (0,17; 0,25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación?

$$\text{Proporción muestral} = p = \frac{0,25+0,17}{2} = \frac{0,42}{2} = 0,21 \rightarrow q = 0,79.$$

$$E = \frac{0,25-0,17}{2} = \frac{0,08}{2} = 0,04.$$

$$\sigma = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{0,21 \cdot 0,79} = \sqrt{0,1659} = 0,4073.$$

$$\text{Datos: } n = 100; E = 0,04; \sigma = 0,4073.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 0,04 \cdot \frac{\sqrt{100}}{0,4073} = 0,04 \cdot 24,5514 = 0,9821.$$

$$P\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z > 0,98) = 1 - P(Z \leq 0,98) \Rightarrow \text{Mirando en la tabla } N(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,8365 = 0,1635 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,1635 = 0,3270 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0,3270 = 0,6730.$$

El nivel de confianza aplicado es del 67,30 %.

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - ky - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real k . Se pide:

a) Determine los valores de k para los cuales el sistema es compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $k = 2$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k + 1 + 2 + 2k + 2 - 1 = 4k + 4 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

$$\underline{\text{Para } k \neq -1 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

b)

Para $k = 2$ el sistema resulta: $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4 \cdot 2 + 4} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-4+1}{12} = \frac{-3}{12} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{4}.}$$

2º) Calcule el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la parábola de ecuación $y = x^2 - 3$. Dibuje el recinto limitado por ambas funciones.

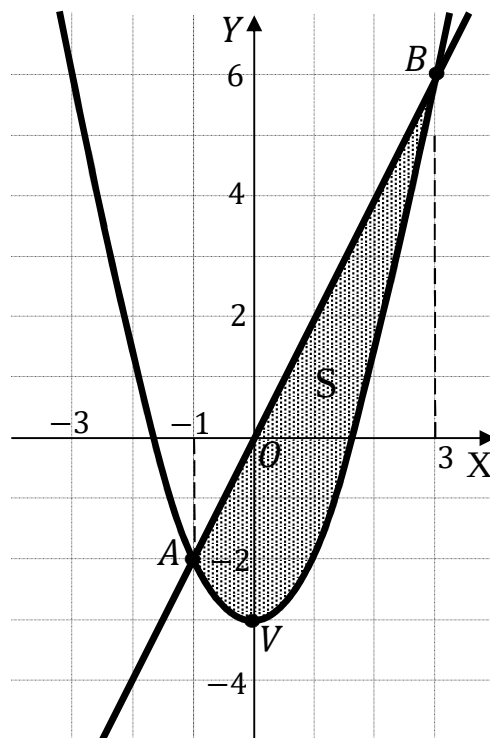
Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - 3$ y la recta $y = 2x$ se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{array} \right\} &\Rightarrow x^2 - 3 = 2x; \quad x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, -2) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3, 6) \end{cases} \end{aligned}$$

El vértice de la parábola $y = x^2 - 3$, que es convexa (U) es $V(0, -3)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la figura adjunta.

Las ordenadas de la recta $y = 2x$ son mayores o iguales que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = x^2 - 3$ en el intervalo del área a calcular. De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 [2x - (x^2 - 3)] dx = \\ &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right] = -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \\ &= 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{32}{3} u^2 \cong 10,68 u^2.}$$

3º) Considere la función $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 1$?

b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x = 0$ y $x = 3$. ¿Cuándo es creciente o decreciente la función en estos puntos?

a)

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad depende del valor de a , que se obtiene a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a)^2 = (1+a)^2 = a^2 + 2a + 1 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 1; a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ para $a = 0$ y para $a = -2$.

b)

$$\text{La función resulta } \begin{cases} a = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ a = -2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función derivada para cada uno de los valores de x pedidos es la siguiente:

$$a = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ f'(3) = \begin{cases} e^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Para $x = 0 \in -1 \leq x < 1 \Rightarrow f'(0) = e^{-1} > 0 \Rightarrow$ Creciente.

Para $x = 3 \in x \geq 1 \Rightarrow f'(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ Creciente.

$$a = -2 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ f'(3) = \begin{cases} e^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Para $x = 0 \in -1 \leq x < 1 \Rightarrow f'(0) = e^{-1} > 0 \Rightarrow$ Creciente.

Para $x = 3 \in x \geq 1 \Rightarrow f'(3) = 2 > 0 \Rightarrow$ Creciente.

La función es creciente en los dos puntos.

4º) Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.

a) Si elegimos uno al azar, cual es la probabilidad de que sea rojo?

b) Si elegimos dos al azar, sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean azules?

c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazamiento, calcule la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo?

a)

$$P = \frac{17}{17+13} = \frac{17}{30} = \underline{0,5667}.$$

b)

$$P = \frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{13 \cdot 2}{5 \cdot 29} = \frac{26}{145} = \underline{0,1793}.$$

c)

$$P = P(AR) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870} = \underline{0,2540}.$$
