PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Considerar las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la traspuesta de la matriz C.

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$.

----

a)

$$A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A \cdot X + B = C;\ \ A \cdot X = C - B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Un estudio acerca de la presencia de CO_2 en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función $C(t) = -0{,}2t^2 + 4t + 25$, con $0 \leq t \leq 25$, (t en años transcurridos desde el año 2.000). Se pide:

a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c) ¿Cuando $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente?

----

a)

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(t) = -0{,}4t + 4.$ $\qquad\qquad$ $C'(t) = -0{,}4 < 0 \Rightarrow Máximo.$

$C'(t) = 0 \Rightarrow -0{,}4t + 4 = 0;\ -4t + 40 = 0;\ -t + 10 = 0 \Rightarrow t = 10.$

$\underline{El\ máximo\ nivel\ de\ contaminación\ se\ alcanzará\ el\ año\ 2.010}.$

b)

$$C(t) = -0{,}2t^2 + 4t + 25 = 0;\ -2t^2 + 40t + 250 = 0;\ \ t^2 - 20t - 125 = 0;$$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400+500}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{20 \pm 30}{2} = 10 \pm 15 \Rightarrow t_1 = -5;\ t_2 = 25.$$

La solución negativa carece de sentido.

$\underline{El\ nivel\ de\ contaminación\ cero\ se\ alcanzará\ el\ año\ 2.025}.$

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$C'(t) = -0{,}4t + 4.$

$C'(17) = -0{,}4 \cdot 17 + 4 = -6{,}8 + 4 = -2{,}8 < 0.$

$\underline{Cuando\ t = 17\ el\ nivel\ de\ contaminacion\ será\ decreciente}.$

****

3º) Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0,4 y 0,6, respectivamente. Se sabe que dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0,3. Se pide:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

$$Datos: P(A) = 0{,}4;\ \ P(B) = 0{,}6;\ \ P(A/B) = 0{,}3.$$

$a)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ocurran\ los\ dos\ sucesos\ a\ la\ ves\ es\ 0{,}18.}$$

$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}82.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ocurra\ cualquiera\ de\ los\ dos\ sucesos\ es\ 0{,}82.}$$

$c)$

El suceso contrario a “que no ocurra ninguno de los dos sucesos” es “que ocurra alguno de los sucesos”.

$$P = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$$

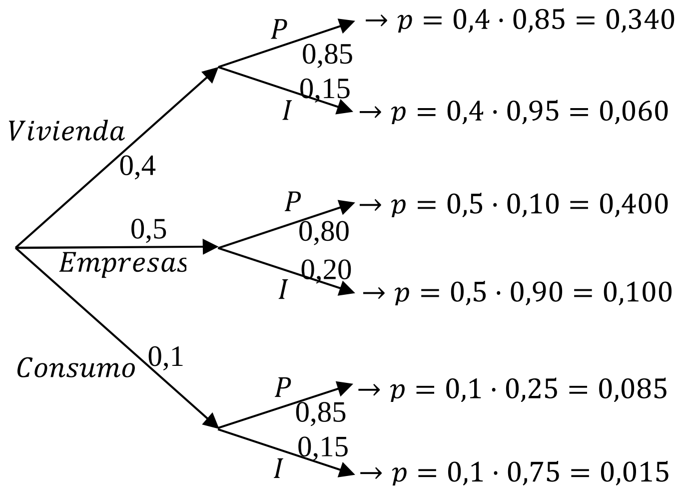
$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ ocurra\ ninguno\ de\ los\ dos\ sucesos\ es\ 0{,}18.}$$

****

4º) En una cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 15 % resultan impagados; de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 %; y de los créditos concedidos al consumo resultan impagados el 15 %.

a) Calcular la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?



a)

$$P = P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(E) \cdot P(P/E) + P(C) \cdot P(P/C) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}85 + 0{,}5 \cdot 0{,}80 + 0{,}1 \cdot 0{,}85 = 0{,}340 + 0{,}400 + 0{,}085 = \underline{0{,}825}.$$

b)

$$P = P(C/P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C) \cdot P(P/C)}{P(V) \cdot P(P/V) + P(E) \cdot P(P/E) + P(C) \cdot P(P/C)} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}85}{0{,}4 \cdot 0{,}85 + 0{,}5 \cdot 0{,}80 + 0{,}1 \cdot 0{,}85} = \frac{0{,}085}{0{,}825} = \underline{0{,}1030}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 euros y han vendido el doble de participaciones de un euros que de 5 euros. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcular el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z el números de participaciones de lotería de 1, 2 y 5 euros que venden los estudiantes, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = 620 \\ x = 2z \\ x + y + z = 280 \end{array}\right\}.$$

Sustituyendo el valor de x en la primera y tercera ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2z + 2y + 5z = 620 \\ 2z + y + z = 280 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y + 7z = 620 \\ y + 3z = 280 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y + 7z = 620 \\ -2y - 6z = -560 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 60;$$

$x = 2 \cdot 60 = 120;\;\; y + 3 \cdot 60 = 280;\;\; y + 180 = 280 \Rightarrow y = 100.$

$\underline{Han\ vendido\ 120\ participaciones\ de\ 1\ euro;\ 100\ de\ 2\ euros\ y\ 60\ de\ 3\ euros.}$

****

2º) Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1,1 euros y el de cada lote de tipo B es de 1,5 euros. ¿Cuántos lotes de tipo A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? Se tiene que plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Sean x e y el número de lotes de papel de los tipos A y B que se venden, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+2y\le 88 \\ 3x+2y\le 148 \\ x\ge y\ge 0 \end{array}\right\}$.

$① \Rightarrow x+2y\le 88 \Rightarrow y\le \frac{88-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

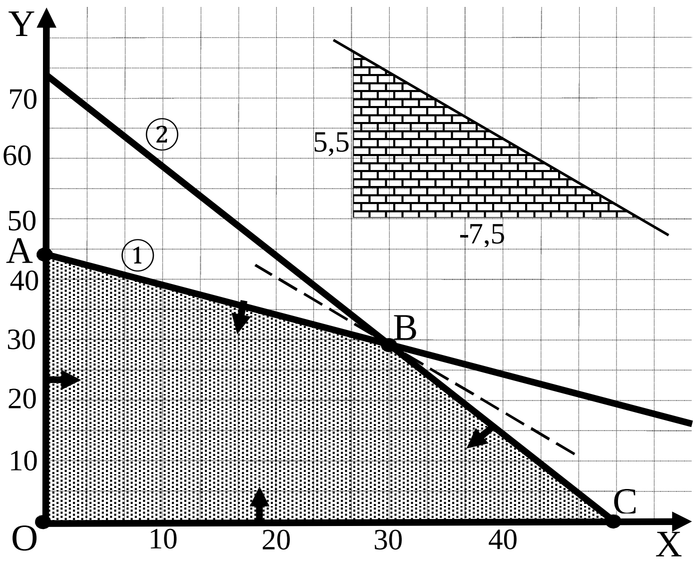
x	40	20
y	24	34

$② \Rightarrow 3x+2y\le 148 \Rightarrow y\le \frac{148-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	74	14

La función de rendimiento es la siguiente: $f(x,y)=1{,}1x+1{,}5y$.

La región factible es la que aparece sombreada de la figura.



Los vértices de la sección factible son, además del origen de coordenadas, los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=88 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,44).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=88 \\ 3x+2y=148 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-88 \\ 3x+2y=148 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=60;\ \ x=30;\ \ 30+2y=88;$

$2y=58;\ \ y=29 \Rightarrow B(30,29).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=148 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=148 \Rightarrow C\left(\frac{148}{3},0\right).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,44) = 1{,}1 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 44 = 0 + 66 = 66.$

$B \Rightarrow f(30,29) = 1{,}1 \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 29 = 33 + 43{,}5 = 76{,}5.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{148}{3}, 0\right) = 1{,}1 \cdot \frac{148}{3} + 1{,}5 \cdot 0 = 54{,}27 + 0 = 54{,}27.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 1{,}1x + 1{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1{,}1}{1{,}5}x = -\frac{5{,}5}{7{,}5}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{5{,}5}}{\mathbf{7{,}5}}.$$

$$\underline{Maximiza\ beneficios\ vendiendo\ 30\ lotes\ A\ y\ 29\ lotes\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 76{,}5\ euros.}$$

****

3º) En cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por $f(t)=\begin{cases} \frac{17}{9}t & si\ 0\le t<9 \\ at^2+\beta t-172 & si\ \ 9\le t<20 \\ 168-7t & si\ \ 20\le t<24 \end{cases}$. Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0,20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo de consumo de agua, determinar $a\ y\ \beta$.

Siendo la función continua en $(0,20)$, sus límites laterales son iguales en cualquiera de los puntos del intervalo.

$$x=9\Rightarrow\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 9^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{17}{9}t\right)=\frac{17}{9}\cdot 9=17 \\ \lim\limits_{x\to 9^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 9}(at^2+\beta t-172)=81a+9b-172\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 9^-}f(x)=\lim_{x\to 9^+}f(x)\Rightarrow 17=81a+9\beta-172;\ \ 81a+9\beta=189;$$

$9a+\beta=21.\quad$ (1)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo es que se anule su primera derivada.

$$f'(t)=\begin{cases}\frac{17}{9} & si\ 0\le t<9 \\ 2at+\beta & si\ \ 9\le t<20 \\ -7 & si\ \ 20\le t<24\end{cases}.$$

Si a las 15 horas tiene un máximo:

$f'(15)=0\Rightarrow 2a\cdot 15+\beta=0;\ \ 30a+\beta=0.\quad$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l}9a+\beta=21 \\ 30a+\beta=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}-9a-\beta=-21 \\ 30a+\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow 21a=-21\Rightarrow \underline{a=-1;\ \ \beta=30}.$$

****

4º) Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, obteniendo los siguientes resultados:

63,7; 48; 43,5; 65; 82; 70,3; 56,5; 50.

a) Calcular un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores.

b) ¿De qué tamaño tiene que ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1,2 kg?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{63,7+48+43,5+65+82+70,3+56,5+50}{8} = \frac{479}{8} = 59,875.$$

$\alpha = 0,10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = \mathbf{1,645}.$ $\qquad (1 - 0,05 = 0,9500 \ \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $n = 8$; $\overline{x} = 59,875$; $\sigma = 6$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(59,875 - 1,645 \cdot \frac{6}{\sqrt{8}};\ 59,875 + 1,645 \cdot \frac{6}{\sqrt{8}}\right);$$

$(59,875 - 1,645 \cdot 2,1213;\ 59,875 + 1,645 \cdot 2,1213);$

$(59,875 - 3,4896;\ 59,875 + 3,4896).$

$$\underline{I.C._{97\ \%} = (56,3854;\ 63,3646).}$$

b)

Datos: $\sigma = 6$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$; $E = 1,2$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{6}{1,2}\right)^2 =$

$= (1,645 \cdot 5)^2 = 8,225^2 = 67,65.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 68\ jugadores.}$

****