PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JULIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Sea la función $f(x)=e^{x^2+ax+b}$.

a) Calcular α y b para que f(x) tenga un extremo en el punto A(1, 1).

b) Calcular los extremos de la función f(x) cuando α = 0 y b = 0.

----

a)

Por contener la función $f(x)=e^{x^2+ax+b}$ al punto A(1, 1) es f(1) = 1:

$$f(1)=1 \Rightarrow e^{1^2+a+b}=1 \Rightarrow 1+a+b=0 \;;;\; \underline{a+b=-1}. \quad (1)$$

Una función tiene un extremo relativo en un punto cuando su derivada se anula para el valor de la abscisa en ese punto.

$$f'(x)=\underline{(2x+a)\cdot e^{x^2+ax+b}}.$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow (2+a)\cdot e^{1^2+a+b}=0 \Rightarrow 2+a=0 \;;;\; \underline{\underline{a=-2}}.$$

Sustituyendo en (1) el valor de α obtenido: $-2+b=-1 \;;;\; \underline{\underline{b=1}}$.

b)

Para α = 0 y b = 0 la función resulta $f(x)=e^{x^2}$.

Una función tiene un extremo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = 0}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, se trata de un mínimo.

$$f''(x) = 2 \cdot \left(1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x}\right) = \underline{2e^{x}(1 + x)}.$$

$f''(0) = 2 \cdot e^{0}(1 + 0) = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo para x = 0.

$f(0) = e^{0^2} = e^{0} = 1 \Rightarrow$ Mínimo: P(0, 1).

****

2º) Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int \frac{5 \cdot dx}{(3x-1)^2}$. b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$. c) $\int \frac{(x+1)^3}{2x} \cdot dx$.

----

a)

$$\int \frac{5 \cdot dx}{(3x-1)^2} = 5 \cdot \int \frac{dx}{(3x-1)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x-1=t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot \int \frac{\frac{1}{3} \cdot dt}{t^2} = \frac{5}{3} \cdot \int t^{-2} \cdot dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{5}{3t} + C = \underline{\underline{-\frac{5}{3(3x-1)} + C}}.$$

b)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx + 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \underline{A + 4B}. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -\sqrt{t} + C_1 = \underline{-\sqrt{1-x^2} + C_1 = A}.$$

$$B = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \underline{arc\ sen\ x + C_2 = B}.$$

Sustituyendo en (*) los valores de A y B:

$$\underline{\underline{\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = 4\ arc\ sen\ x - \sqrt{1-x^2} + C}}.$$

c)

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x}\, dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{2x}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} L|x| + C.$$

$$\underline{\underline{\int \frac{(x+1)^3}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x + L|x| \right) + C}}.$$

****

3º) Estudiar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} mx-y+13z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 2x-my+4z=0 \end{array}\right\}$ para los distintos valores del parámetro m. Resolverlo cuando m = 3.

A efectos de rango las matrices de coeficientes y ampliada son iguales por tratarse de un sistema homogéneo. La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{pmatrix}$.

El rango de A en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix}=4m-13m-14-26+7m^2+4=7m^2-9m-36=0\ ;;\ m=\frac{9\pm\sqrt{81+1008}}{14}=$$

$$=\frac{9\pm\sqrt{1089}}{14}=\frac{9\pm 33}{14}\ \Rightarrow\ \underline{m_1=\frac{42}{14}=3}\ ;;\ \underline{m_2=-\frac{24}{14}=-\frac{12}{7}}\ .$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 3 \\ a\neq -\frac{12}{7} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ Rango\ A=3=n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ \det er\min ado}$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\frac{12}{7} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ Rango\ A=2<n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ in\det er\min ado}$$

Resolvemos para m = 3. El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 3x-y+13z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{array}\right\}$ que es compatible indeterminado; despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, e igualando a un parámetro una de las ecuaciones, por ejemplo <u>z = λ</u>:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=-7\lambda \\ 2x-3y=-4\lambda \end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{r} 3x+3y=-21\lambda \\ 2x-3y=-4\lambda \end{array}\right.\ \Rightarrow\ 5x=-25\lambda\ ;;\ \underline{x=-5\lambda}\ ;;\ -5\lambda+y=-7\lambda\ ;;\ \underline{y=-2\lambda}\ .$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \left\{\begin{array}{l} x=-5\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R\ .}}$$

****

4º) Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=1 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación en forma continua de una recta s que pase por el punto P y sea paralela a la recta r.

b) Halla la ecuación general de un plano π que pase por el punto P y contenga a r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1+2\lambda} \;;;\; y=\lambda-x=\lambda-1-2\lambda=\underline{-1-\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto de r es A(1, -1, 0) y un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(2,\ -1,\ 1)$.

La recta s, por ser paralela a r, tiene su mismo vector director; su ecuación en forma continua es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}}}.$$

b)

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 0,\ 1)-(1,\ -1,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v_r}$ son vectores del plano π pedido, cuya expresión general es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \;;;\; (x-1)+2y-2(z-1)+(x-1)=0 \;;;$$

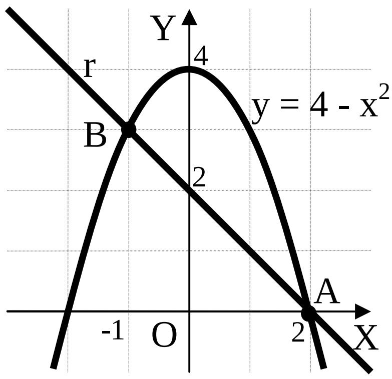
$$2(x-1)+2y-2(z-1)=0 \;;;\; (x-1)+y-(z-1)=0 \;;;\; x-1+y-z+1=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x+y-z=0}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) En la figura siguiente se muestran la parábola de ecuación $f(x)=4-x^2$ y la recta r que pasa por los puntos A y B de la parábola de abscisas -1 y 2, respectivamente. Hallar la ecuación de una recta s tangente a la parábola f(x) y paralela a la recta r.



Las coordenadas de los puntos A y B son las siguientes:

$f(2)=4-2^2=4-4=0 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)}$.

$f(-1)=4-(-1)^2=4-1=3 \rightarrow \underline{B(-1,\ 3)}$.

La pendiente de la recta r es la misma que la del vector $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA}=A-B=(2,\ 0)-(-1,\ 3)=(3,\ -3) \Rightarrow Pendiente=m=\frac{-3}{3}=\underline{-1}$.

La pendiente de la recta pedida s, por ser paralela a r, también es m = -1.

La pendiente a una función en un punto es igual que la derivada de la función en ese punto; como se conoce la pendiente, el valor de la primera derivada tiene que ser también $f'(x)=-1$:

$f'(x)=-2x=-1 \rightarrow \underline{x=\frac{1}{2}}$.

El punto de tangencia es: $f\left(\frac{1}{2}\right)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{1}{2},\ \frac{15}{4}\right)}$.

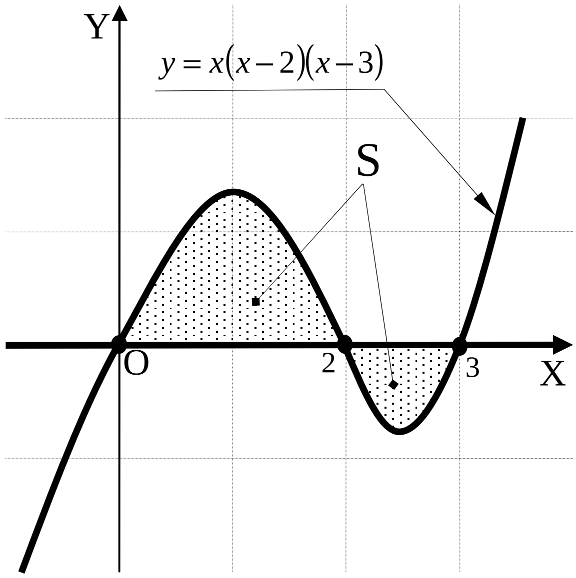
$s \equiv y-\frac{15}{4}=-1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=-x+\frac{1}{2}\ ;;\ 4y-15=-4x+2 \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv 4x+4y-17=0}}$.

****

2º) Calcular el área de la región plana limitada por la curva $y = x(x-2)(x-3)$ y la recta de ecuación y = 0.

Los puntos de corte de la curva polinómica $y = x(x-2)(x-3)$ tienen por abscisas las soluciones de la ecuación $x(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_3 = 3 \rightarrow \underline{B(3,\ 0)} \end{cases}$.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $y(4) = 4 \cdot (4-2)(4-3) > 0$, la representación gráfica aproximada de la curva es la que indica la figura adjunta.



Para facilitar la integración obtenemos la expresión polinómica de la curva, que es la siguiente: $y = x(x-2)(x-3) = x(x^2 - 5x + 6) = \underline{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

De la observación de la figura se deduce el valor del área, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx - \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx + \int_3^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 \right]_3^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{5 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 \right) - 0 + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{5 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 \right) -$$

$$- \left(\frac{3^4}{4} - \frac{5 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 \right) = 2 \cdot \left(\frac{16}{4} - \frac{40}{3} + 12 \right) - \frac{81}{4} + 45 - 27 = 8 - \frac{80}{3} + 24 - \frac{81}{4} + 18 = 50 - \frac{80}{3} - \frac{81}{4} =$$

$$. = \frac{600 - 320 - 243}{12} = \frac{600 - 563}{12} = \underline{\underline{\frac{37}{12} u^2 = S}}.$$

****

3º) Determinar los valores de los parámetros α y b para los que tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$. Calcular la matriz A^{-1} cuando α = 3 y b = 1.

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=0 \Rightarrow \underline{a=b}.$$

$$\underline{\underline{A \ es \ inversible \ \forall a,b \in R, \ a \neq b}}.$$

Para α = 3 y b = 1 es $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Hallamos A^{-1} por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1-F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2-3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to \tfrac{1}{4}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}}}.$$

****

4º) Determinar la posición relativa de los planos $\beta_1 \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda-2\mu \\ y=4+\lambda \\ z=-2+2\lambda-5\mu \end{cases}$, $\beta_2 \equiv x+y+z=2$, y $\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

En primer lugar se expresan los planos por ecuaciones implícitas.

$$\beta_1 \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda-2\mu \\ y=4+\lambda \\ z=-2+2\lambda-5\mu \end{cases} \Rightarrow P_1(-1,\ 4,\ -2),\ \overrightarrow{u_1}=(3,\ 1,\ 2),\ \overrightarrow{u_2}=(-2,\ 0,\ -5).$$

$$\beta_1(P_1;\ \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -5(x+1)-4(y-4)+2(z+2)+15(y-4)=0\ ;;$$

$$-5(x+1)+11(y-4)+2(z+2)=0\ ;;\ -5x-5+11y-44+2z+4=0 \Rightarrow \underline{\beta_1 \equiv 5x-11y-2z+45=0}.$$

$$\underline{\beta_2 \equiv x+y+z-2=0}.$$

$$\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-2)+2(y+1)+3z-4z-3(x-2)-(y+1)=0\ ;;$$

$$-(x-2)+(y+1)-z=0\ ;;\ -x+2+y+1-z=0 \Rightarrow \underline{\beta_3 \equiv x-y+z-3=0}.$$

Siendo M y M' las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, que determinan los tres planos, según sus rangos, pueden presentarse los seis siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ S. C. D. $\rightarrow$ <u>Los tres planos se cortan en un punto</u>.

Rango M = Rango M' = 2 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ <u>Los tres planos se cortan en una recta</u>.

Rango M = Rango M' = 1 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ <u>Los tres planos son coincidentes</u>.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ S. I. $\rightarrow$ <u>Dos planos paralelos cortados por el 3º</u>.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ S. I. $\rightarrow$ <u>Los tres planos son paralelos</u>.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 2 $\rightarrow$ S. I. $\rightarrow$ <u>Dos planos coincidentes y secantes al 3º</u>.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}5 & -11 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix}5 & -11 & -2 & 45\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$Rango\ \ M\ \Rightarrow \left|M\right|=\begin{vmatrix}5 & -11 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=5+2-11+2+5+11=14\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M=3}.$$

$$\underline{Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ \det er\min ado}.$$

<u>Los tres planos se cortan en un punto</u>.

****