PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Determina los valores de α y b para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si\ \ x\le 0 \\ 2a+b\,sen\ x & si\ \ 0<x \end{cases}$ sea derivable.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función es continua $\forall a,\ b\in R$, excepto para el valor x = 0 cuya continuidad depende de los valores de α y b.

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 es necesario que esté definida en ese punto; que sus límites laterales en x = 0 sean iguales y coincidan con el valor de la función.

$$f(0)=e^{a\cdot 0}=e^0=\underline{1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{ax}=e^0=\underline{1} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2a+b\,sen\ x)=2a+b\cdot 0=\underline{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2a=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a\cdot e^{ax} & si\ \ x\le 0 \\ 0+b\cos x & si\ \ 0<x \end{cases}=\begin{cases} ae^{ax} & si\ \ x\le 0 \\ b\cos x & si\ \ 0<x \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(0^-\right)=ae^{a\cdot 0}=a\cdot e^0=a\cdot 1=\underline{a} \\ \\ f'\left(0^+\right)=b\cos 0=b\cdot 1=\underline{b} \end{array}\right\}\Rightarrow\ a=b\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=\frac{1}{2}}}.$$

****

2º) Resolver las siguientes integrales:

a) $I_1 = \int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2} \cdot dx$ b) $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{6\,sen\ x}{5-3\cos\ x} \cdot dx$.

----

a)

$$I_1 = \int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2} \cdot dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{x^2} \right) \cdot dx = 5\int \frac{1}{x} \cdot dx + \sqrt{3}\int x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx = 5L|\,x\,| + \sqrt{3} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= 5L|\,x\,| + \sqrt{3} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = 5L|\,x\,| - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + C = \underline{\underline{5L|\,x\,| - \frac{2\sqrt{3x}}{x} + C = I_1}}\ .$$

b)

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{6\,sen\ x}{5-3\cos\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 5-3\cos\ x = t & x=\pi \rightarrow t = 5-3\cos\ \pi = 5+3 = 8 \\ 3\,sen\ x \cdot dx = dt & \\ 6\,sen\ x \cdot dx = 2\,dt & x=0 \rightarrow t = 5-3\cos\ 0 = 5-3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_2 = \int_0^{8} \frac{1}{t} \cdot 2dt = 2 \cdot \int_0^{8} \frac{1}{t} \cdot dt = 2 \cdot [Lt]_2^8 = 2 \cdot (L8 - L2) = 2 \cdot \left(L2^3 - L2\right) = 2 \cdot (3L2 - L2) = \underline{\underline{4L2}}\ .$$

****

3º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$:

a) Discutirlo según los valores de m.

b) Resolverlo para m = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix}=m-1+m(m+1)+4-2(m+1)(m-1)-2m-1=$$

$$=-m+2+m^2+m-2(m^2-1)=2+m^2-2m^2+2=4-m^2=0 \Rightarrow \underline{m_1=-2} \;;;\; \underline{m_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{cases} m\neq -2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ m=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=3-4-2+12+2+1=18-6=12\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ m=-2 \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ m=2\ es\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-2+2+6-8-1+3=11-11=0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ m=2 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

b)

Para m = 2 el sistema es $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+y+2z=1 \\ 2x+2y+z=-1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la tercera ecuación y parametrizando y = λ:

$$\left.\begin{array}{r} x+3z=2-\lambda \\ x+2z=1-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+3z=2-\lambda \\ -x-2z=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=1} \ ;; \ x+2z=1-\lambda \ ;; \ x=1-\lambda-2z=$$

$$=1-\lambda-2=\underline{-1-\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \left.\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}\right\}, \ \forall\lambda\in R}}$$

****

4º) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases}$ y el punto P(1, 0, 1) exterior a r:

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que contiene a r y a P.

b) Hallar la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta s que pasa por P y es paralela a la recta r.

----

a)

Para determinar un punto y un vector director de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+z=2\lambda \\ -x+z=2-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=2 \;;\; \underline{z=1} \;;\; x+z=2\lambda \;;$$

$$x=-z+2\lambda \;;\; \underline{x=-1+2\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son A(-1, 0, 1) y $\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ 0)$.

Los puntos A y P determinan el vector:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 0,\ 1)-(-1,\ 0,\ 1)=(2,\ 0,\ 0).$$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(P,\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{u}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \;;\; \begin{vmatrix} y & z-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \;;\; -z+1=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv z-1=0}}.$$

b)

Las rectas r y s, por ser paralelas, tienen el mismo vector director.

La expresión de r dada por unas ecuaciones continuas es: $s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$. Dada por unas ecuaciones implícitas es: $s \equiv \begin{cases} x-1=2y \\ 2(z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}}}$.

****

OPCIÓN B

1º) a) Determinar los valores de α, b y c sabiendo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene extremos relativos en x = 1 y x = -3, y que corta a su función derivada en x = 0. Determinar asimismo la naturaleza de los extremos.

b) Calcular el límite: $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

----

a)

La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, por extremos relativos en x = 1 y x = -3, su derivada tiene que anularse para estos valores.

$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \;;;\; 2a+b=-3 \\ f'(-3)=0 \Rightarrow 27-6a+b=0 \;;;\; -6a+b=-27 \end{matrix}\right\}$. Resolviendo el sistema resultante:

$$\left.\begin{matrix} 2a+b=-3 \\ -6a+b=-27 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2a+b=-3 \\ 6a-b=27 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8a=24 \;;\; \underline{\underline{a=3}} \;;\; 2a+b=-3 \;;\; 6+b=-3 \;;\; \underline{\underline{b=-9}}.$$

Por cortar a su función derivada en x = 0 tiene que ser $f(0)=f'(0)$:

$$\left.\begin{matrix} f(0)=c \\ f'(0)=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=b \Rightarrow \underline{\underline{c=-9}}.$$

Para determinar la naturaleza de los extremos relativos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo y si es positiva, de un mínimo. Siendo $f'(x)=3x^2+6x-9$:

$$f''(x)=6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''(1)=6+6=12>0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=1}} \\ \\ f''(-3)=-18+6=-12<0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-3}} \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{4-3}-1}=\frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{1}-1}=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0} \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

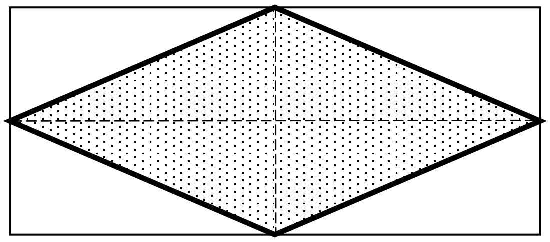
(se multiplica y divide numerador y denominador por las conjugadas de numerador y denominador)

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-3}-1\right)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x \to 2} \frac{(x+2-4)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{(2x-3-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}+1}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{\sqrt{4-3}+1}{2\left(\sqrt{2+2}+2\right)} = \frac{1+1}{2(2+2)} = \frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{\underline{\underline{4}}}.$$

****

2º) La figura adjunta muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima.



Llamando α y b a los lados mayor y menor del rectángulo, respectivamente, y teniendo en cuenta el dato que nos dan, es:

$$2a+2b=100 \;;;\; a+b=50 \;;;\; \underline{b=50-a}.$$

Sabiendo que el área del rombo puede expresarse como la mitad del producto de sus diagonales:

$$S=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{a\cdot(50-a)}{2}=\underline{\frac{1}{2}\left(-a^2+50a\right)}.$$

Para que el área sea máxima es necesario que su derivada sea cero:

$$S'=\frac{1}{2}(-2a+50)=-a+25=0 \Rightarrow \underline{a=25}.$$

$$b=50-a=50-25=\underline{25=b}.$$

<u>Se trata de un cuadrado de lado 25 metros.</u>

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de α encontrado:

$S'=-1<0 \Rightarrow$ Máximo, como queríamos justificar.

****

3º) Calcular las matrices A y B tales que $\left.\begin{array}{l} 5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$.

Resolviendo por el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{l} 10A+6B=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ -9A-6B=-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=A}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} -15A-9B=-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 15A+10B=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=B}}.$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos P(1, -2, 0) y Q(0, 1, 3):

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a PQ.

b) Hallar la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por Q e intersecta a r.

----

a)

Para obtener un punto y un vector director de la recta r se expresa en forma de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \;;;\; x=\lambda \;;;\; \lambda-2y+\lambda=0 \;;;\; 2y=2\lambda \;;;\; y=\lambda \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto de r es O(0, 0, 0) y un vector director $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0,\ 1,\ 3)-(1,\ -2,\ 0)=(-1,\ 3,\ 3)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0 \;;;\; 3x-y+3z+z-3x-3y=0 \;;;\; -4y+4z=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv y-z=0}}$$

b)

El haz de planos β perpendiculares a la recta r es de la forma: $\beta \equiv x+y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto Q(0, 1, 3) es el que satisface su ecuación:

$$0+1+3+D=0 \;;;\; 4+D=0 \;;;\; D=-4 \;\Rightarrow\; \underline{\gamma \equiv x+y+z-4=0}.$$

El punto M intersección de la recta r con el plano γ es la solución del sistema de ecuaciones que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \gamma \equiv x+y+z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+\lambda+\lambda-4=0 \;;;\; 3\lambda-4=0 \;;;\; \lambda=\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)}.$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos Q y M.

Los puntos Q y M determinan el vector:

$$\overrightarrow{QM} = M - Q = \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right) - (0,\ 1,\ 3) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right).$$

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QM}$, por ejemplo, $\overrightarrow{v_s} = (4,\ 1,\ -5)$.

La recta s, dada por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases}}}$.

****