

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****JULIO – 2013**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$ en su punto extremo.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}}$.

c) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$.

a)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada: $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $y_{(0)} = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \Rightarrow \underline{P(0, 1)}$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto: $y'_{(0)} = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{m = 0}$.

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$: $y - 1 = 0 \cdot (x - 0) = 0$.

La recta tangente pedida es $y = 1$.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} &= \left(\frac{4+2}{6} \right)^{\frac{1}{4-4}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Indet. "tipo } n^\circ e" \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2+4-4}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{6+x-4}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x-4}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{1}{\frac{6}{x-4}} \right)^{\frac{1}{x-4}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \frac{6}{x-4} = n \ ; \ \frac{1}{x-4} = \frac{n}{6} \ \middle| \ \begin{array}{l} x \rightarrow 4 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{6}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{6}} = \\ &= \underline{\underline{e^{\frac{1}{6}}}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{e}}}. \end{aligned}$$

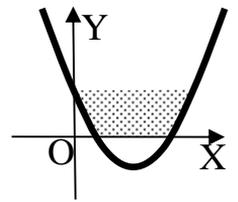
c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{0-1}{0} - \frac{1}{0} = -\infty - \infty = \underline{\underline{-\infty}}.$$

De otra forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1-x}{x^2} = \frac{0-1-0}{0} = -\frac{1}{0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

2º) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ representada respecto a los ejes coordenados. Calcular el área de la parte sombreada.



Los puntos de corte de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$\text{Eje X: } f(x) = 0 \;; \; x^2 - 4x + 3 = 0 \;; \; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 1} \;; \; \underline{x_2 = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A(1, 0)} \text{ y } \underline{B(3, 0)}.$$

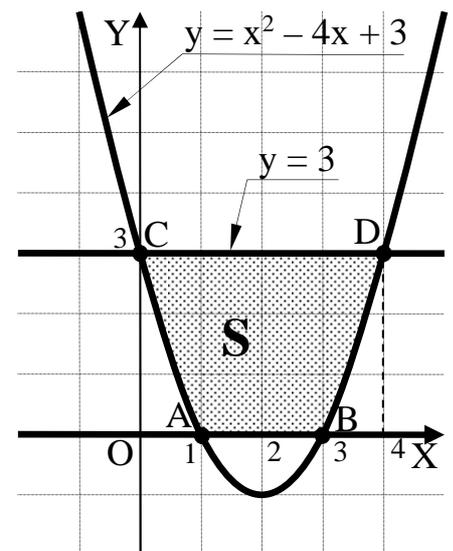
$$\text{Eje Y: } x = 0 \;; \; f(0) = 3 \Rightarrow \underline{C(0, 3)}.$$

Las rectas horizontales que limitan la superficie a calcular son el eje de abscisas e $y = 3$.

Los puntos de corte de la recta $y = 3$ con la función $f(x)$ son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 3 \;; \; x^2 - 4x = 0 \;;$$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;; \; \underline{x_2 = 4} \Rightarrow \underline{C(0, 3)} \text{ y } \underline{D(4, 3)}.$$



La representación gráfica de la situación se puede apreciar en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que las ordenadas de la recta $y = 3$ son mayores o iguales que las correspondientes de la función $f(x)$, la superficie a calcular es:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 3 \cdot dx - \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx - \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx = \\ &= \int_0^4 3 \cdot dx + \int_1^0 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx + \int_4^3 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx = [3x]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^0 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_4^3 = \\ &= (3 \cdot 4) - 0 + 0 - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 \right) = \\ &= 12 - \frac{1}{3} + 2 - 3 + 9 - 18 + 9 - \frac{64}{3} + 32 - 12 = 31 - \frac{65}{3} = \frac{93 - 65}{3} = \underline{\underline{\frac{28}{3} u^2 = S}}. \end{aligned}$$

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{pmatrix}$:

a) Determinar los valores del parámetro m para que la matriz A tiene inversa.

b) Calcular la inversa de la matriz A para $m = 2$.

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \quad ; \quad m^2 - 4m + 3 = 0 \quad ; \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \underline{m_1 = 1} \quad ; \quad \underline{m_2 = 3}.$$

A es inversible $\forall m \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

b)

Para $m = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. La inversa de A se obtiene por el método de

Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - 4F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - \frac{1}{2}F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}}}$$

4º) Dados el punto P(2, 2, -2) y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$:

a) Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene a r y pasa por P.

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a P y es perpendicular a r.

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} y + z = -2 - 2\lambda \\ 3y + z = -\lambda \end{cases} \begin{cases} -y - z = 2 + 2\lambda \\ 3y + z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 + \lambda \;;$$

$$\underline{y = 1 + \frac{1}{2}\lambda} \;; \; y + z = -2 - 2\lambda \;; \; z = -y - 2 - 2\lambda = -1 - \frac{1}{2}\lambda - 2 - 2\lambda = -3 - \frac{5}{2}\lambda = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -3 - \frac{5}{2}\lambda \end{cases} .$$

Un punto y un vector director de r son A(0, 1, -3) y $\vec{v}_r = (2, 1, -5)$.

Los puntos A y P determinan el vector:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (2, 2, -2) - (0, 1, -3) = (2, 1, 1).$$

La expresión general del plano π_1 es la siguiente:

$$\pi_1(P; \vec{u}, \vec{v}_r) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$-5(x-2) + 2(y-2) + 2(z+2) - 2(z+2) - (x-2) + 10(y-2) = 0 \;; \; -6(x-2) + 12(y-2) = 0 \;;$$

$$(x-2) - 2(y-2) = 0 \;; \; x - 2 - 2y + 4 = 0 .$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv x - 2y + 2 = 0}}$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por vector normal al vector director de la recta, o sea: $\vec{n} = (2, 1, -5)$. La expresión general del haz es $\alpha \equiv 2x + y - 5z + D = 0$.

De los infinitos planos que constituyen el haz α , el plano π_2 que contiene a P y es el que satisface su ecuación:

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \leq -1 \\ \frac{bx}{\sqrt{x+2}} & x > -1 \end{cases}$, hallar valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo \mathbb{R} .

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua para todo \mathbb{R} , excepto para el valor $x = -1$, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para $x = -1$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+a)^2 = f(-1) = (a-1)^2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{bx}{\sqrt{x+2}} = \frac{-b}{\sqrt{1}} = -b \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1)^2 = -b. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable para todo \mathbb{R} , excepto para el valor $x = -1$, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para $x = -1$ tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) & x \leq -1 \\ b \cdot \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}} & x > -1 \quad (*) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{b \cdot \sqrt{x+2} - bx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2})^2} = b \cdot \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} = b \cdot \frac{\frac{2(x+2) - x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} = b \cdot \frac{2x+4-x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = b \cdot \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = g'(x) \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(-1^-) = 2(-1+a) \\ f'(-1^+) = b \cdot \frac{-1+4}{2(-1+2)\sqrt{-1+2}} = 3b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow -2+2a = 3b \quad ; \quad b = \frac{2a-2}{3}$$

Sustituyendo en la expresión (1) el valor obtenido de b :

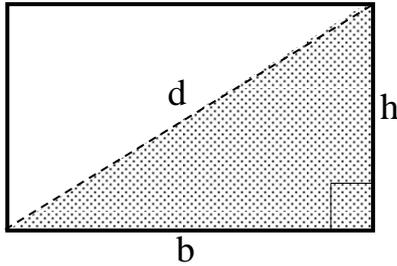
$$(a-1)^2 = -b \quad ; \quad (a-1)^2 = -\frac{2a-2}{3} \quad ; \quad 3(a^2 - 2a + 1) = -2a + 2 \quad ; \quad 3a^2 - 6a + 3 = -2a + 2 \quad ;$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \quad ; ; \quad a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow \underline{a_1 = 1} \quad ; ; \quad \underline{a_2 = \frac{1}{3}}.$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot 1 - 2}{3} = \underline{0 = b_1} \quad ; ; \quad b_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 2}{3} = \frac{\frac{2}{3} - 2}{3} = \frac{2 - 6}{3} = \underline{-\frac{4}{9} = b_2}.$$

$f(x)$ es derivable en R para $\{a=1, b=0\}$ y también para $\left\{a=\frac{1}{3}, b=-\frac{4}{9}\right\}$

2º) Entre todos los rectángulos de área 8 m^2 hallar las dimensiones del que minimiza el producto de las diagonales.



El área de un rectángulo de base b y altura h es el valor de su producto: $S = b \cdot h$.

Sabiendo que el área es de 8 m^2 : $b \cdot h = 8$;; $h = \frac{8}{b}$.

Del triángulo rectángulo sombreado de la figura:

$$d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{8}{b}\right)^2 = b^2 + \frac{64}{b^2} = \frac{b^4 + 64}{b^2}.$$

Como las diagonales de un rectángulo son iguales, lo que se desea minimizar es, precisamente, el valor hallado $P = d \cdot d = d^2 = \frac{b^4 + 64}{b^2}$.

$$P' = \frac{4b^3 \cdot b^2 - (b^4 + 64) \cdot 2b}{b^4} = \frac{4b^4 - 2(b^4 + 64)}{b^3} = \frac{4b^4 - 2b^4 - 128}{b^3} = \frac{2b^4 - 128}{b^3}.$$

$$P' = 0 \Rightarrow \frac{2b^4 - 128}{b^3} = 0 \quad ;; \quad 2b^4 - 128 = 2(b^4 - 64) = 0 \quad ;; \quad b^4 = 64 \quad ;; \quad b^2 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{b = 2\sqrt{2}}}.$$

$$h = \frac{8}{b} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}} = h = b.$$

El rectángulo pedido es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ metros

3º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = z \\ (m-1)x + y + z = m \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores de m.

b) Resolverlo para $m = 2$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ m-1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (m-1)^2 + 1 - (m-1) + (m-1) = 0 \quad ; ; \quad -(m-1)^2 + 1 = 0 \quad ; ;$$

$$(m-1)^2 = 1 \quad ; ; \quad m^2 - 2m + 1 = 1 \quad ; ; \quad m^2 - 2m = 0 \quad ; ; \quad m(m-2) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \quad ; ; \quad \underline{m_2 = 2}.$$

Para $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible det er min ado}$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = -C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible in det er min ado}$

b)

Resolvemos para $m = 2$. El sistema resulta
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ equivalente al sistema}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}, \text{ que es compatible indeterminado.}$$

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $x = \lambda$, resulta:

$$\begin{cases} y - z = -\lambda \\ y + z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 - 2\lambda \;; \; \underline{y = 1 - \lambda} \;; \; y - z = -\lambda \;; \; z = y + \lambda = 1 - \lambda + \lambda \;; \; \underline{z = 1} .$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \;; \; \forall \lambda \in R \\ z = 1 \end{cases}$$

$$4^{\circ}) \text{ Dadas las rectas } r \equiv \frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} :$$

a) Determinar la ecuación general del plano π paralelo a las rectas r y s y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Hallar el ángulo que forman r y s .

a)

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (5, 3, 4)$ y $\vec{v}_s = (3, 0, 0)$.

La expresión general del plano pedido π es la siguiente:

$$\pi(O; \vec{v}_r, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 3 \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} y & z \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 4y - 3z = 0}}.$$

b)

El ángulo que forman dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s &= |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{(5, 3, 4) \cdot (3, 0, 0)}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{15 + 0 - 0}{\sqrt{25 + 9 + 16} \cdot \sqrt{9}} = \frac{15}{\sqrt{50} \cdot 3} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}. \end{aligned}$$

Las rectas r y s forman un ángulo de 45° .
