DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x^2+sen^2 x+2, & si \;\; x\le 0 \\ \sqrt[3]{x}+2a\cos x, & si \;\; 0<x<\pi \\ \sqrt[3]{x+b}-2, & si \;\; \pi\le x \end{cases}$.

a) Hallar valores de α y b para que f(x) sea continua en todo R (explicar).

b) Estudiar derivabilidad en todo R de la función f(x), con los valores de α y b obtenidos anteriormente.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, $\forall a,b\in R$, excepto para los valores siguientes: x = 0 y x = π, cuya continuidad es dudosa.

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+sen^2 x+2\right)=f(0)=\underline{2} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x}+2a\cos x\right)=\underline{2a} \end{array} \right\} \Rightarrow 2=2a \;\;;;\;\; \underline{\underline{a=1}}.$$

Para que la función sea continua para x = π tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=\pi\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sqrt[3]{x}+2\cos\ x\right)=\underline{\sqrt[3]{\pi}-2} \\ \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sqrt[3]{x+b}-2\right)=f(\pi)=\underline{\sqrt[3]{\pi+b}-2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[3]{\pi}-2=\sqrt[3]{\pi+b}-2\ \ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=0}}.$$

b)

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} 3x^2+sen^2\,x+2, & si\ \ x\le 0 \\ \sqrt[3]{x}+2\cos\ x, & si\ \ 0<x<\pi \\ \sqrt[3]{x}-2, & si\ \ \pi\le x \end{cases}.$

Una función continua es derivable en un punto cuando existen sus derivadas por la izquierda y por la derecha y además son iguales.

La derivada de la función es: $f'(x)=\begin{cases} 6x+2sen\ x\cdot\cos\ x, & si\ \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-2sen\ x, & si\ \ 0<x<\pi \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & si\ \ \pi\le x \end{cases}.$

$$f'(0)\Rightarrow\left\{ \begin{array}{l} f'(0^-)=6\cdot 0+\ 2\cdot 0\cdot 1=0 \\ f'(0^+)=\dfrac{1}{0}-\ 2\cdot 0=+\infty \end{array} \right\}\Rightarrow\ f'(0^-)\neq f'(0^+).$$

<u>La función f(x) no es derivable para x = 0.</u>

$$f'(\pi)\Rightarrow\left\{ \begin{array}{l} f'(\pi^-)=\dfrac{1}{0}+\ 2\cdot 0=+\infty \\ f'(\pi^+)=\dfrac{1}{0}=+\infty \end{array} \right\}\Rightarrow\ f'(\pi^-)=f'(\pi^+).$$

<u>La función f(x) es derivable para x = π.</u>

****

2º) Calcular las siguientes integrales:

a) $I_1 = \int\left(5\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{2}{x^2}\right) \cdot dx$ b) $I_2 = \int \frac{5}{(2x-3)^2 + 9} \cdot dx$ c) $I_3 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot g\ x \cdot dx$.

----

a)

$$I_1 = \int\left(5\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{2}{x^2}\right) \cdot dx = 5\int x^{\frac{1}{3}} \cdot dx - 3\int x^3 \cdot dx + 2\int x^{-2} \cdot dx = \frac{5x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{15\sqrt[3]{x^4}}{4} - \frac{3x^4}{4} - \frac{2}{x} + C = \underline{\underline{\frac{15x\sqrt[3]{x}}{4} - \frac{3x^4}{4} - \frac{2}{x} + C = I_1}}.$$

b)

$$I_2 = \int \frac{5}{(2x-3)^2 + 9} \cdot dx = \frac{5}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{2x-3}{3} = t \\ dx = \frac{3}{2}dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt =$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \frac{5}{6} \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\underline{\frac{5}{6} \cdot arc\ tag\ \frac{2x-3}{3} + C = I_2}}.$$

c)

$$I_3 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot g\ x \cdot dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{sen\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} sen\ x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{matrix}\middle| \begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \\ x = \frac{\pi}{6} \to t = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_3 = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$= L1 - L\frac{1}{2} = 0 - (L1 - L2) = -L1 + L2 = \underline{\underline{L2\ u^2 = I_3}}$.

****

3º) Calcular la matriz X tal que $X \cdot A + 3B = 2C$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (detallar todos los cálculos realizados).

$X \cdot A + 3B = 2C$;; $X \cdot A = 2C - 3B$.

Multiplicando los dos términos de la última igualdad por A^{-1}:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (2C - 3B) \cdot A^{-1} \;;;\; X \cdot I = (2C - 3B) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (2C - 3B) \cdot A^{-1}}. \quad (*)$$

$$2C - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Para hallar la matriz inversa de A utilizaremos el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{2} F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo y operando con los valores de las matrices obtenidas en la expresión (*), resulta:

$$X = (2C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16+1 & -12+\frac{1}{2} \\ -12+1 & -9+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -15 & -\frac{23}{2} \\ -11 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} = X}}.$$

****

4º) Dadas las rectas secantes $r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - 4\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 2 \\ -5x + y + z = 0 \end{cases}$, obtener las ecuaciones en forma continua y en forma paramétrica de la recta s que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y es perpendicular a ambas, explicando el procedimiento utilizado.

Existen diversas formas de hacer este ejercicio; una de ellas es la siguiente:

En primer lugar expresamos la recta $r_2 \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 2 \\ -5x + y + z = 0 \end{cases}$ por unas ecuaciones paramétricas, para lo cual hacemos, por ejemplo, x = t:

$$r_2 \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 2 \\ -5x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -y + z = 2 - 5t \\ y + z = 5t \end{array} \right\} \Rightarrow 2z = 2 \;;;\; \underline{z = 1} \;;;\; y + z = 5t \Rightarrow \underline{y = -1 + 5t}.$$

Las expresiones de r_2 por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 5t \\ z = 1 \end{cases}}$.

El punto P de corte se obtiene por la igualación de las ecuaciones paramétricas de las rectas r_1 y r_2: $\left. \begin{cases} -1 + \lambda = t \\ 3 - 4\lambda = -1 + 5t \\ -2 + 3\lambda = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} \lambda = 1 \\ t = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{P(0,\ -1,\ 1)}$.

Un vector director de la recta r_2 es $\overrightarrow{v_2} = (1,\ 5,\ 0)$ y de r_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1,\ -4,\ 3)$.

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector resultante del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$:

$$\overrightarrow{v_s}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3j + 5k + 4k - 15i = -15i + 3j + 9k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (5,\ -1,\ -3)}.$$

Las expresiones de la recta s por unas ecuaciones continuas y paramétricas, respectivamente, son las siguientes:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-3}}} \qquad \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones, justificando en cada caso si la función es creciente o decreciente en el punto indicado:

i) $f(x)=arc\ sen\ (2x)-tag\ (3x),\ en\ \ x=0.$

ii) $g(x)=\sqrt{e^{x^2-4}+\cos\ (\pi x)},\ en\ \ x=2.$

b) Calcular el siguiente límite, explicando como se hace: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\ x\cdot(1-\cos\ x)}{L^3(x+1)}.$

----

a)

i) $f(x)=arc\ sen\ (2x)-tag\ (3x),\ en\ \ x=0.$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}-\frac{3}{\cos^2(3x)}=\underline{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{3}{\cos^2(3x)}}.$$

$$f'(0)=\frac{2}{\sqrt{1-0}}-\frac{3}{\cos^2 0}=\frac{2}{1}-\frac{3}{1}=2-3=-1<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Decreciente\ \ para\ \ x=0}}.$$

ii) $g(x)=\sqrt{e^{x^2-4}+\cos\ (\pi x)},\ en\ \ x=2.$

$$\underline{g'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2-4}-\pi\cdot sen\ (\pi x)}{2\sqrt{e^{x^2-4}+\cos\ (\pi x)}}}.$$

$$g'(2)=\frac{2\cdot 2\cdot e^{4-4}-\pi\cdot sen\ (2\pi)}{2\sqrt{e^{4-4}+\cos\ (2\pi)}}=\frac{4\cdot e^0-\pi\cdot 0}{2\sqrt{e^0+1}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Creciente\ \ para\ \ x=2}}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x\cdot(1-\cos\ x)}{L^3(x+1)}=\frac{0\cdot(1-1)}{L^3 1}=\frac{0}{0}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\cos\ x\cdot(1-\cos\ x)+sen\ x\cdot sen\ x}{3\cdot L^2(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(\cos\ x-\cos^2 x+sen^2 x)}{3\cdot L^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(\cos\ x-\cos\ 2x)}{3\cdot L^2(x+1)}=\frac{(0+1)(1-1)}{3\cdot L^2(0+1)}=\frac{0}{0}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot (\cos x - \cos 2x) + (x+1)(-sen\, x + 2sen\, 2x)}{6 \cdot L(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)(\cos x - \cos 2x) + (x+1)(-sen\, x + 2sen\, 2x)}{6 \cdot L(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)(\cos x - sen\, x - \cos 2x + 2\, sen\, 2x)}{6 \cdot L(x+1)} = \frac{1 \cdot (1-0-1+0)}{3 \cdot L^2(0+1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind\text{et.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - sen\, x - \cos 2x + 2\, sen\, 2x) + (x+1)(-sen\, x - \cos x + 2\, sen\, 2x + 4\cos 2x)}{6 \cdot \frac{1}{x+1}} =$$

$$= \frac{(1-0-1+0) + (0+1)(-0-1+0+4)}{6 \cdot \frac{1}{0+1}} = \frac{0+1 \cdot 3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\ .$$

****

2º) Obtener razonadamente dos números positivos, de forma que se cumplan los siguientes requisitos:

i) La suma de ambos debe ser 60.

ii) El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro resulte un valor máximo.

Sean los números x e y.

Por definición se cumple que: $x+y=60 \rightarrow \underline{y=60-x}$.

Tiene que cumplirse que: $P=x^2 \cdot y^3 \Rightarrow \underline{Máximo}$.

Expresamos P por una sola variable: $P=x^2 \cdot y^3 = x^2 \cdot (60-x)^3$.

Para que P sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y que, para los valores encontrados, sea negativa la segunda derivada:

$$P'=2x\cdot(60-x)^3+x^2\cdot 3\cdot(60-x)^2\cdot(-1)=x\cdot(60-x)^2[2\cdot(60-x)-3x]=x\cdot(60-x)^2(120-5x)=$$

$$=5x\cdot(60-x)^2(24-x)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=60} \;;;\; \underline{x_3=24}.$$

Las soluciones x = 0 y x = 60 carecen de sentido lógico (es para mínimo o punto de inflexión de la función), por lo cual la solución es x = 24.

La justificación es la siguiente:

$$P''=5\cdot(60-x)^2(24-x)-5x\cdot 2\cdot(60-x)(24-x)-5x\cdot(60-x)^2=$$

$$=5\cdot(60-x)[(60-x)(24-x)-2x(24-x)-x(60-x)]=5\cdot(60-x)\left(1440-84x+x^2-48x+2x^2-60x+x^2\right)=$$

$$=5\cdot(60-x)\left(4x^2-192x+1440\right)=\underline{20\cdot(60-x)\left(x^2-48x+360\right)=P''(x)}.$$

$$P''(24)=20\cdot 36\cdot\left(24^2-48\cdot 24+360\right)=720\cdot(360-576)<0 \Rightarrow \underline{Máximo,\ c.q.j.}$$

<u>Los números pedidos son 24 y 36, respectivamente.</u>

****

3º) Discutir la compatibilidad del sistema $\begin{cases} 3x + mz = 1 \\ -x + my + 2z = m \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}$ según los distintos valores del parámetro m.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; y \; M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m & 1 \\ -1 & m & 2 & m \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de M y M' en función de m son los siguientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6m - 2m^2 = 2m(3-m) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \;;;\; \underline{m_2 = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er \min ado}}$$

$Para\ m = 0\ es\ M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, equivalente a efectos de rango a $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, por ser $F_1 + F_2 = F_3$.

$$\underline{\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er \min ado}}$$

$Para\ m = 3\ es\ M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ m = 3 \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$ y dado el punto P(2, -2, 3) exterior a r:

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que los contiene, explicando el procedimiento utilizado.

b) Obtener las ecuaciones en forma paramétrica, en forma continua y como intersección de dos planos, de la recta s que pasa por P y es perpendicular al plano π, explicando el procedimiento utilizado.

----

a)

Un punto y un vector director de r son A(-1, 0, 2) y $\overrightarrow{v} = (3,\ -5,\ 2)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (3,\ -2,\ 1)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-4(x-2)+3(y+2)-15(z-3)+6(z-3)+5(x-2)-6(y+2)=0\ ;;\ (x-2)-3(y+2)-9(z-3)=0\ ;;$$

$$x-2-3y-6-9z+27=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi \equiv x-3y-9z+19=0}}.$$

b)

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -3,\ -9)$.

La recta s tiene como vector director al vector normal del plano; sus expresiones de las formas pedidas son las siguientes:

Por unas ecuaciones paramétricas: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 3 - 9\lambda \end{cases} (\lambda \in R)}}.$

En forma continua: $\underline{\underline{s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{-9}}}.$

Como intersección de dos planos:

De la forma continua se pueden obtener las igualdades: $\begin{cases} -3x+6=y+2 \\ -9x+18=z-3 \end{cases}$.

$$s \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 9x+z-21=0 \end{cases}$$

****