PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Representar la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales, x = -1 y x = 3.

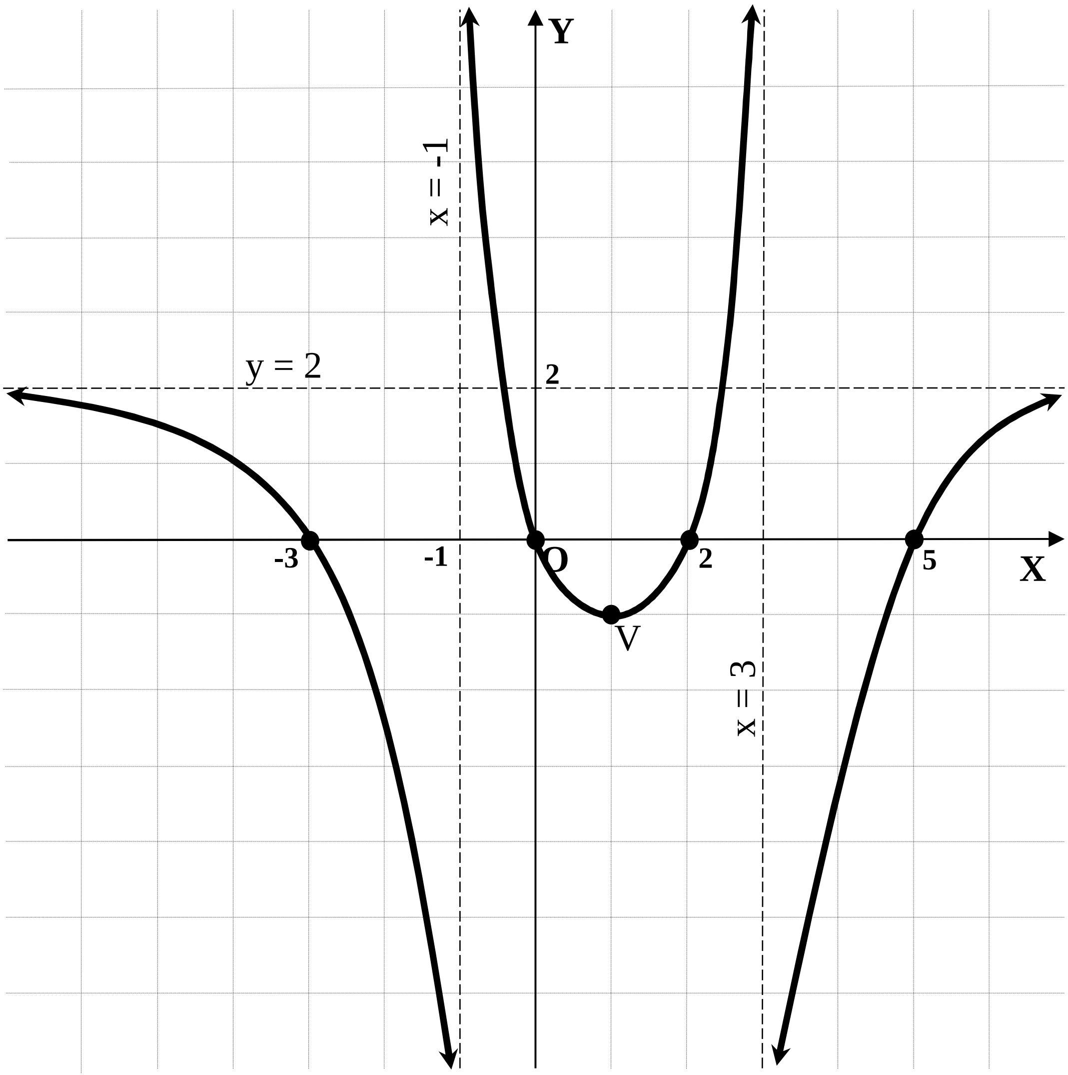
b) Para $x \to \pm\infty$, se cumple $f(x) \to 2$.

c) f(-3) = f(0) = f(2) = f(5) = 0.

d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y es creciente en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

e) f(1) = -1.

La representación gráfica de la función f(x) es, aproximadamente, la siguiente:


Y
x = -1
y = 2
2
-3
-1
O
2
5
X
V
x = 3

****

2º) Dadas las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=3x$:

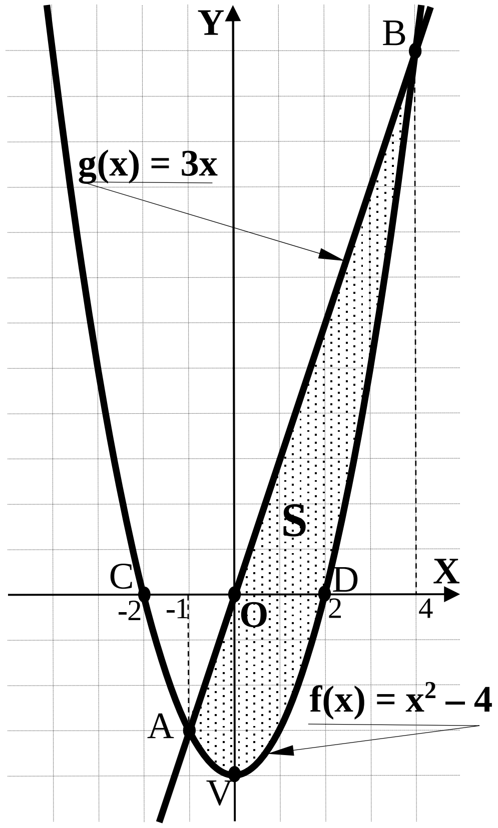
a) Representar el recinto limitado por sus gráficas, indicando vértice y puntos de corte con los ejes.

b) Calcular el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte de la recta y la parábola son los siguientes:



$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-4=3x \;;\; x^2-3x-4=0 \;;$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow \underline{A(-1,\ -3)} \\ x_2=4 \rightarrow \underline{B(4,\ 12)} \end{cases}$$

La función f(x) es simétrica con respecto al eje OY por ser f(x) = f(-x).

Los puntos de corte con los ejes de f(x) son los siguientes:

$$Eje\ OX \Rightarrow y=f(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0 \;;\; x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \rightarrow \underline{C(-2,\ 0)} \\ x_2=2 \rightarrow \underline{D(2,\ 0)} \end{cases}$$

$$Eje\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(x)=-4 \Rightarrow \underline{V(0,\ -4)}$$

La función g(x), por ser afín, pasa por el origen de coordenadas.

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

b)

Por ser todas las ordenadas de la parábola menores que las de la recta en el intervalo (-1, 4), la superficie es la diferencia de las limitadas por la recta y la parábola, respectivamente, o sea:

$$S=\int_{-1}^{4}\left[3x-\left(x^2-4\right)\right]\cdot dx=\int_{-1}^{4}\left(-x^2+3x+4\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{4}=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{3\cdot 4^2}{2}+4\cdot 4\right)-$$

$$-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3\cdot(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right]=-\frac{64}{3}+24+8-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4=36-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{216-130-9}{6}=\frac{216-139}{6}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{77}{6}\,u^2=S}}$$

****

3º) a) Discutir el sistema $\begin{cases} mx-y+3z=m \\ 2x+4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo para m = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad A'=\begin{pmatrix} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6-4+4m+4=0 \;;;\; 4m=6 \Rightarrow \underline{m=\frac{3}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m\neq\frac{3}{2} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Deter\min ado}}$$

Para $m=\frac{3}{2}$ es $A'=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; A' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-6-2+3-8)\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; A'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m=\frac{3}{2} \Rightarrow Rango\;\; M=2 \;;;\; Rango\;\; M'=3 \Rightarrow Inompatible}}$$

b)

Para m = 0 resulta el sistema $\begin{cases} -y+3z=0 \\ 2x+4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-3+8+2}{-6}=\underline{\underline{-\frac{7}{6}=x}} \;;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12-3}{-6}=\frac{15}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{2}=y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1-4}{-6} = \underline{\underline{\frac{5}{6} = z}}$$

****

4º) Obtener la ecuación en forma general del plano π que pasa por el punto A(0, 3, 2) y es paralelo a las rectas $r_1 \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x-z=5 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$.

Los vectores directores del plano π son los vectores directores de las rectas. El vector director de $r_1 \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1$ es $\overrightarrow{v_1} = (-1,\ 2,\ 1)$.

Un vector director de $r_2 \equiv \begin{cases} x-z=5 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 3,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2j + 3k + 3i + j = 3i - j + 3k = \underline{(3,\ -1,\ 3) = \overrightarrow{v_2}}\ .$$

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 6x + (z-2) + 3(y-3) - 6(z-2) + x + 3(y-3) = 0\ ;;$$

$$7x + 6(y-3) - 5(z-2) = 0\ ;;\ 7x + 6y - 18 - 5z + 10 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x + 6y - 5z - 8 = 0}}$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{bx}+a^2x, & si \;\; x<0 \\ b+\cos(ax), & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$, determinar los valores de a y b para que sea derivable en toda la recta real.

Para que una función sea derivable en toda la recta real es condición necesaria que sea continua en toda la recta real.

La función f(x) es continua en R, excepto para x = 0, cuya continuidad es dudosa y la estudiamos a continuación.

Para que f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{bx}+a^2x\right)=e^0+0=\underline{1} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[b+\cos(ax)\right]=b+\cos 0=\underline{b+1} \end{array}\right\} \Rightarrow 1=b+1 \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}.$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} 1+a^2x, & si \;\; x<0 \\ \cos(ax), & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen las derivadas por la izquierda y por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a^2, & si \;\; x<0 \\ -a\;sen(ax), & si \;\; x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=\underline{a^2} \\ f'(0^+)=\underline{-a\;sen(ax)} \end{cases} \Rightarrow a^2=-a\;sen(ax) \;;;\; a^2+a\,sen(ax)=0 \;;;$$

$$a[a+sen(ax)]=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; a+sen(ax)=0 \;;;\; sen(ax)=a \Rightarrow \underline{a_2=0}$$

<u>La función es derivable en toda la recta real para a = b = 0.</u>

****

2º) Determinar dos números positivos cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno por el cubo del otro sea máximo.

Sean los sumandos a y b.

Del enunciado se deduce que $a+b=24$;; $b=24-a$.

$P=a\cdot b^3 \Rightarrow Mínimo$;; $P=a\cdot(24-a)^3$.

El producto pedido será máximo cuando su derivada sea cero:

$$P'=1\cdot(24-a)^3+a\cdot\left[3\cdot(24-a)^2\cdot(-1)\right]=(24-a)^3-3a\cdot(24-a)^2=0 \;;;\; (24-a)^2\left[(24-a)-3a\right]=$$

$$=(24-a)^2(24-4a)=0 \;;;\; 4(24-a)^2(6-a)=0 \Rightarrow \underline{a_1=24} \;;;\; \underline{a_2=6}.$$

Por definición del ejercicio se deduce que la solución es a = 6; no obstante, vamos a justificar esta solución.

La condición de ser cero la derivada es necesaria pero no es suficiente; para que sea el producto máximo tiene que cumplirse que la segunda derivada sea negativa para el valor o valores que anulen la primera derivada.

$$P''=4\cdot\left[2(24-a)\cdot(-1)\cdot(6-a)+(24-a)^2\cdot(-1)\right]=-4\cdot(24-a)\left[2(6-a)+(24-a)\right]=$$

$$=-4\cdot(24-a)(12-2a+24-a)=-4\cdot(24-a)(36-3a)=\underline{-12\cdot(24-a)(12-a)=P''}$$

$P''(24)=0 \Rightarrow$ Para a = 24 no hay ni máximo ni mínimo.

$P''(6)=-12\cdot(24-6)(12-6)=-12\cdot18\cdot6<0 \Rightarrow$ <u>Máximo para x = 6, como se esperaba.</u>

<u>Los números pedidos son 6 y 18.</u>

****

3º) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = A + B$, explicando las operaciones efectuadas, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} la ecuación $A \cdot X = A + B$, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A+B) \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (A+B) \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot (A+B)} \qquad (*)$$

Calculamos ahora la matriz inversa de A, para lo cual, vamos a utilizar el Método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aplicando ahora a la expresión (*):

$$X = A^{-1} \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+6-0 & 0+4-0 & 0+2-2 \\ 2+9-0 & 0+6-0 & 0+3-4 \\ 1+3-0 & 0+2-0 & 0+1-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 11 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = X}}$$

****

4º) Estudiar la posición relativa de los planos: $\pi_1 \equiv 10x - y + 5z = 2$; $\pi_2 \equiv 4x + 3y - z = 6$ y $\pi_3 \equiv -3x + 2y - 3z = 2$.

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan los planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -90 + 40 - 3 + 45 + 20 - 12 = 105 - 105 = 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M = 2}.$$

El rango de la matriz ampliada es el siguiente:

$$Rango \; M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 60 + 16 + 18 + 18 - 120 + 8 = 0 \\ \\ \{C_1, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -20 - 24 - 90 - 6 + 180 - 40 = 0 \\ \\ \{C_2, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 18 + 60 + 4 - 18 - 30 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rango \; M' = 2}$$

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado y en consecuencia:

$$\underline{\underline{Los \; planos \; se \; cortan \; en \; una \; recta.}}$$

Nota: No existen planos coincidentes.

****