

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****SEPTIEMBRE - 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) a) Determinar la abscisa de los puntos en los que la recta tangente a la función dada por $f(x) = L \frac{x+1}{x-1}$ es paralela a la recta de ecuación $r \equiv 2x + 3y = 4$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada en el apartado anterior en el punto de abscisa $x = 3$.

a)

$$f(x) = L \frac{x+1}{x-1} = L(x+1) - L(x-1) \quad ; ; \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{x^2-1} = \underline{f'(x)}$$

$$r \equiv 2x + 3y = 4 \quad ; ; \quad 3y = -2x + 4 \quad ; ; \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{m = -\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = m = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2}{x^2-1} = -\frac{2}{3} \quad ; ; \quad x^2 - 1 = 3 \quad ; ; \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \underline{x_1 = 2} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = -2}$$

b)

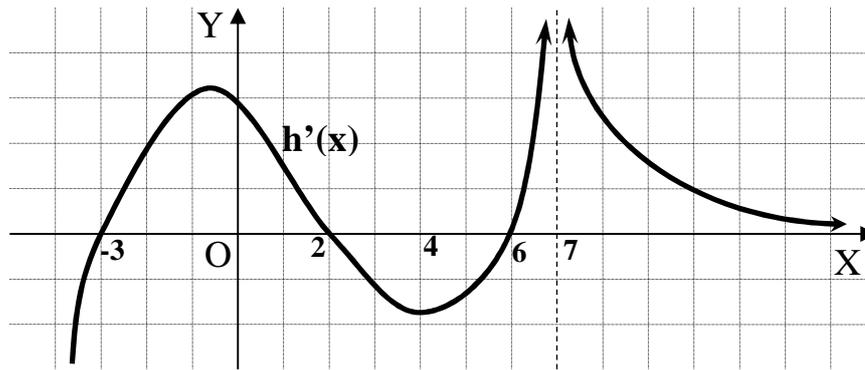
$$f(x) = L \frac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f(3) = L \frac{3+1}{3-1} = L \frac{4}{2} = L2 \quad \Rightarrow \quad \underline{P(3, L2)}$$

$$m = f'(3) = \frac{-2}{3^2-1} = \frac{-2}{9-1} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} = m \quad ; ; \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - L2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \quad ; ;$$

$$4y - 4L2 = -x + 4 \quad ; ;$$

$$\underline{\underline{t \equiv x + 4y - 4(L2 + 1) = 0}}$$

2º) Dada la gráfica de $h'(x)$, deducir la monotonía y extremos relativos de $h(x)$, así como la curvatura y sus puntos de inflexión, explicando cómo se hace.



Monotonía (crecimiento y decre.):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{Creciente : (-3, 2) \cup (6, 7) \cup (7, +\infty)}} \\ \underline{\underline{Decreciente : (-\infty, -3) \cup (2, 6)}} \end{array} \right.$$

Una función tiene un máximo relativo cuando la derivada pasa de ser creciente a decreciente y tiene un mínimo relativo cuando pasa de ser decreciente a creciente.

Máximos y mínimos relativos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{Máx. : [2, h(2)]}} \\ \underline{\underline{Mín : [-3, f(-3)]; Mín : [6, f(6)]}} \end{array} \right.$$

Una función es convexa (\cup) en un intervalo cuando es positiva su segunda derivada, es decir, cuando es creciente la primera derivada y es cóncava (\cap) en un intervalo cuando es negativa la segunda derivada, o sea, cuando sea decreciente la primera derivada.

Concavidad y convexidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{Convexidad (\cup) : (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (4, 7)}} \\ \underline{\underline{Concavidad (\cap) : (-\frac{1}{2}, 4) \cup (7, +\infty)}} \end{array} \right.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.

Puntos de Inflexión: $P[-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})]$ y $Q[4, f(4)]$

3°) Calcular el valor de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, que verifica $AX - B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X - B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; ; \begin{pmatrix} x+z \\ -x+z \\ 2x+3y-2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; ;$$

$$\begin{pmatrix} x+z-2 \\ -x+z \\ 2x+3y-2z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+z-2=1 \\ -x+z=1 \\ 2x+3y-2z+2=-3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x+z=3 \\ -x+z=1 \\ 2x+3y-2z=-5 \end{array}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2z = 4$; ; $z = 2$.

$$x+z=3 \rightarrow x+2=3 ; ; \underline{x=1} ; ; 2x+3y-2z=-5 \rightarrow 2+3y-4=-5 ; ; 3y=-3 ; ; \underline{y=-1}$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$, hallar la ecuación del plano π que contiene a ésta recta y pasa por el punto $P(0, -2, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta r son $A(1, -1, 2)$ y $\vec{u} = (-2, 3, 1)$.

El vector $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ también pertenece al plano π pedido.

$$\vec{v} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1, -1, 2) - (0, -2, 1) = (1, 1, 1).$$

El plano π puede determinarse tomando como vectores directores a \vec{u} y \vec{v} y que pasa por el punto P :

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 3x + (y+2) - 2(z-1) - 3(z-1) - x + 2(y+2) = 0 \quad ;;$$

$$2x + 3(y+2) - 5(z-1) = 0 \quad ;; \quad 2x + 3y + 6 - 5z + 5 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 3y - 5z + 11 = 0}}$$

OPCIÓN B

1º) Hallar la función $f(x)$ tal que $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(1) = 0$ y $f(e) = -1$.

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int x^{-2} \cdot dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_1 = -x^{-1} + C_1 = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + C_1 = f'(x)}}$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(-\frac{1}{x} + C_1\right) \cdot dx = -\int \frac{1}{x} \cdot dx + C_1 \cdot \int dx = \underline{\underline{-Lx + C_1x + C_2 = f(x)}}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -L1 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 0 \quad ; ; \quad -0 + C_1 + C_2 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{C_1 + C_2 = 0}} \quad (1)$$

$$f(e) = -1 \Rightarrow -Le + C_1 \cdot e + C_2 = -1 \quad ; ; \quad -1 + eC_1 + C_2 = -1 \quad ; ; \quad \underline{\underline{eC_1 + C_2 = 0}} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ eC_1 + C_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow C_2 = -C_1 \\ \Rightarrow eC_1 - C_1 = 0 \quad ; ; \quad C_1(e-1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = 0}} \quad ; ; \quad C_2 = -C_1 = \underline{\underline{0 = C_2}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -L|x|}}$$

2º) Dada la función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, determinar razonadamente:

- El dominio.
- Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Las ecuaciones de sus asíntotas, si es que las tiene.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
- Su representación gráfica.

a) $x^2 - 1 = 0$;; $x^2 = 1 \rightarrow \underline{x_1 = 1}$;; $\underline{x_2 = -1} \rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{1, -1\}}$

b)

Eje X $\rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{\text{No tiene}}$

Eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1 \Rightarrow \underline{A(0, -1)}$

c)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0 = y \quad (\text{Eje X})$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \quad ;; \quad x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} \quad ;; \quad \underline{x_2 = -1}$$

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

d)

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4 \cdot (x^2 - 1) + 16x}{(x^2 - 1)^3} = \underline{\underline{\frac{-4(x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - 1)^3} = f''(x)}}$$

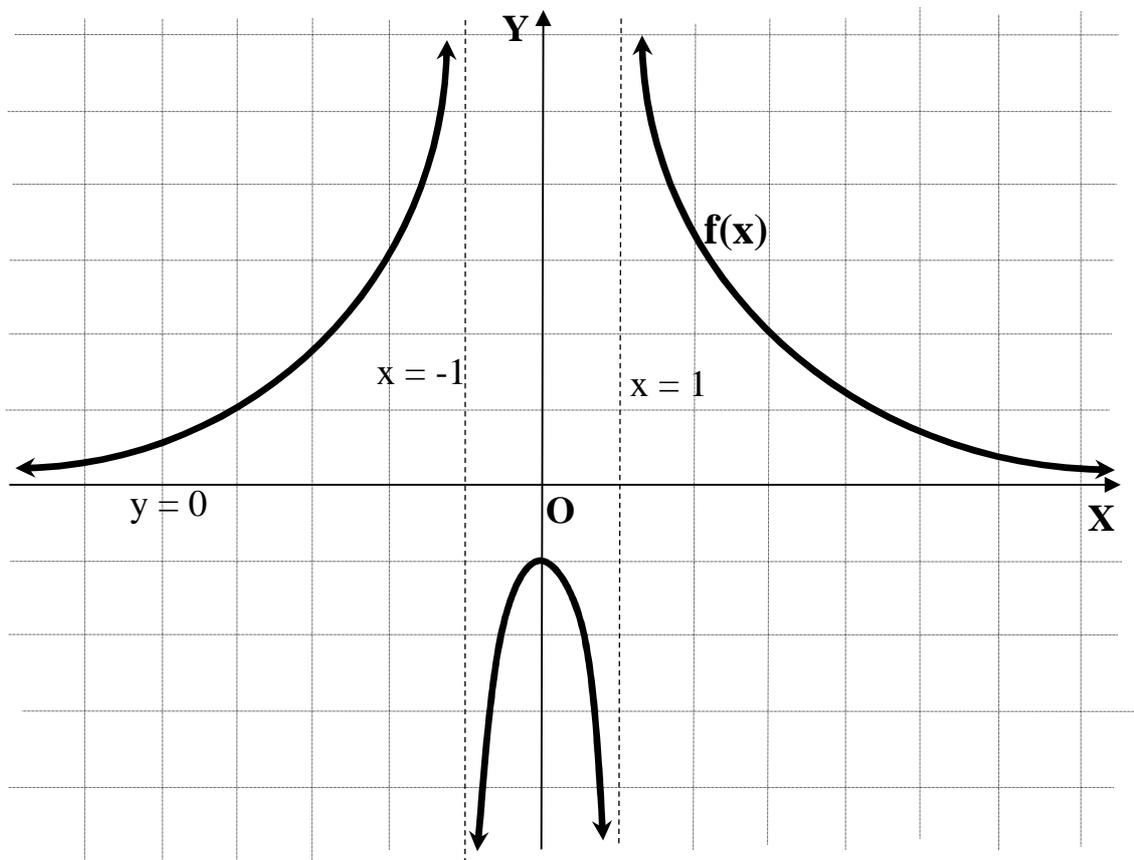
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

$$f''(0) = \frac{-4(1)}{(-1)^2} = \frac{-4}{1} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx.(0, -1)}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente : (-\infty, -1) \cup (-1, 0)}}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente : (0, 1) \cup (1, +\infty)}}$$

e)



3º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$, hallar sin desarrollar el valor de $\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix}$ explicando las propiedades de los determinantes que se utilizan.

$$\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \\ z & 3z+1 & z+2 \end{vmatrix}$$

Si se cambian entre sí dos filas o dos columnas, el valor del determinante cambia de signo; como se cambian entre sí dos veces, se mantiene el signo más.

$$\begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \\ z & 3z+1 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y & y+2 \\ z & 3z & z+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & -1 & y+2 \\ z & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & -1 & y+2 \\ z & 1 & z+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ y & -1 & y \\ z & 1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{7}}$$

En las operaciones anteriores se han empleado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en los demás los mismos elementos que el determinante inicial.

4º) Estudiar la posición relativa del plano $\pi \equiv 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ y la recta r de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \text{ según los valores del parámetro } \lambda.$$

Vamos a realizar el estudio de forma vectorial.

En primer lugar expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \mu} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - y = -1 - 2\mu \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 + 2\mu \end{array} \right\} \rightarrow \underline{x = 2 + 2\mu}$$

$$2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 = 4 + 4\mu - 1 = \underline{3 + 4\mu} = y \Rightarrow r \equiv \underline{\begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = 3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son $P(2, 3, 0)$ y $\vec{v} = (2, 4, 1)$.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (5, \lambda, -2)$.

La recta r y el plano π son paralelos si el producto escalar del vector director de la recta y el normal al plano es cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, 4, 1) \cdot (5, \lambda, -2) = 10 + 4\lambda - 2 = 0 \quad ; ; \quad 8 = 4\lambda \quad ; ; \quad \underline{\underline{\lambda = -2}}$$

Para $\lambda \neq -2$ la recta y el plano son secantes

Para $\lambda = -2$ la recta y el plano son paralelos

Para saber, en el caso de ser paralelos, si el plano contiene a la recta, debe contener a todos sus puntos, por lo tanto, también al punto $P(2, 3, 0)$ tendría que satisfacer su ecuación:

$$\text{Para } \lambda = -2 \rightarrow \pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0$$

$$P(2, 3, 0) \Rightarrow 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 1 = 10 - 6 - 0 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P \notin \pi}}$$
