

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****JUNIO - 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

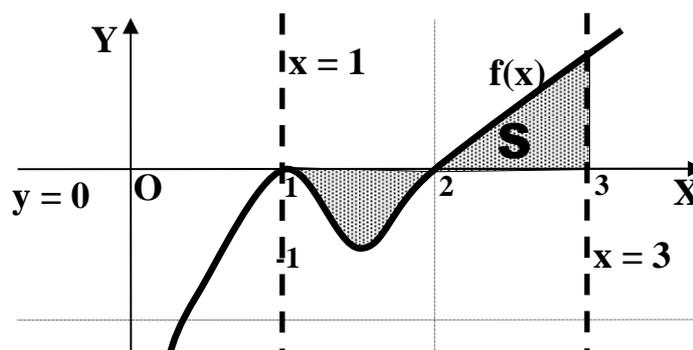
Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{Resolviendo por Ruffini:}$$

	1	-4	5	-2	
1	1	1	-3	2	
	1	-3	2	0	
1	1	1	-2		
	1	-2	0		
2		2			
	1	0			

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2) \Rightarrow \underline{x_1 = x_2 = 1} \ ; \ ; \ ; \ \underline{x_3 = 2}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$S = \int_2^1 f(x) \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx = [F(x)]_2^1 + [F(x)]_2^3 = F(1) - F(2) + F(3) - F(2) =$$

$$= \underline{F(1) + F(3) - 2F(2)} = S \quad (*)$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \cdot dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x = F(x)}}$$

Sustituyendo el valor de F(x) en (*):

$$S = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 2 \right) + \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{45}{2} - 6 \right) - 2 \cdot \left(4 - \frac{32}{3} + 10 - 4 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 2 + \frac{81}{4} + \frac{45}{2} - 42 + \frac{64}{3} - 20 = \frac{82}{4} + \frac{60}{3} + \frac{50}{2} - 64 = \frac{41}{2} + 20 + 25 - 64 =$$

$$= \frac{41}{2} - 19 = \frac{41 - 38}{2} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1'5 u^2 = S}}$$

2º) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad?

Llamando S a la seguridad sería: $S = \frac{1}{10} A \cdot B^2$.

Teniendo en cuenta que $A + B = 9$, $A = 9 - B$. Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$S = \frac{1}{10} (9 - B) \cdot B^2 = \frac{1}{10} (9B^2 - B^3) = S$$

Para maximizar la seguridad, su derivada tiene que ser nula:

$$S'_{(B)} = \frac{1}{10} (18B - 3B^2) = \frac{3B}{10} (6 - B) = S'_{(B)} \Rightarrow S'_{(B)} = 0 \Rightarrow \underline{B_1 = 0} \text{ y } \underline{B_2 = 6}$$

Como existen alarmas de los dos tipos, carece de sentido la solución $B = 0$, por lo tanto la solución del problema es la colocación de

3 alarmas del tipo A y 6 alarmas del tipo B

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''_{(B)} = \frac{1}{10} (18 - 6B) \Rightarrow S''_{(6)} = \frac{1}{10} (18 - 6 \cdot 6) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo, c.q.j.}}$$

3°) a) ¿Para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

b) Calcular A^{-1} en función de k.

a)

Para que una matriz sea inversible es necesario que su determinante sea distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2 - k + 4 = 0 \quad ;; \quad \underline{\underline{k = 6}}$$

A es inversible $\forall k \in R, k \neq 6$.

b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} ;; \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & k \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-k & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2k & -k & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{(6-k)} \cdot \begin{pmatrix} 2-k & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2k & -k & 3 \end{pmatrix}, \forall k \neq 6}}$$

4º) a) Comprobar que las rectas $\left\{ \begin{array}{l} r \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 0, -1) \\ s \equiv (x, y, z) = (0, 3, 1) + \mu(-2, 1, 3) \end{array} \right\}$ se cortan en un punto.

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior.

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto: } \underline{A(1, 2, -1)} \\ \text{Vector: } \underline{\vec{u} = (1, 0, -1)} \end{cases} \quad s \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto: } \underline{B(0, 3, 1)} \\ \text{Vector: } \underline{\vec{v} = (-2, 1, 3)} \end{cases}$$

Un vector \vec{w} , cuyo origen es un punto de r y su extremo es un punto de s es:

$$\vec{w} = \vec{AB} = B - A = (0, 3, 1) - (1, 2, -1) = \underline{\underline{(-1, 1, 2)}} = \vec{w}$$

Si las rectas se cortan en un punto determinan un plano en que cual tienen que estar contenidos los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} . Entonces los tres vectores son coplanarios por lo cual su rango tiene que ser dos:

$$\text{Rango } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 3 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Rango } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{r \text{ y } s \text{ se cortan en un punto}}}$$

b)

El plano π que determinan las rectas es el siguiente:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad (z+1) + 2(y-2) + (x-1) - 3(y-2) = 0 \quad ;;$$

$$(x-1) - (y-2) + (z+1) = 0 \quad ;; \quad x - 1 - y + 2 + z + 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y + z + 2 = 0}}$$

OPCIÓN B

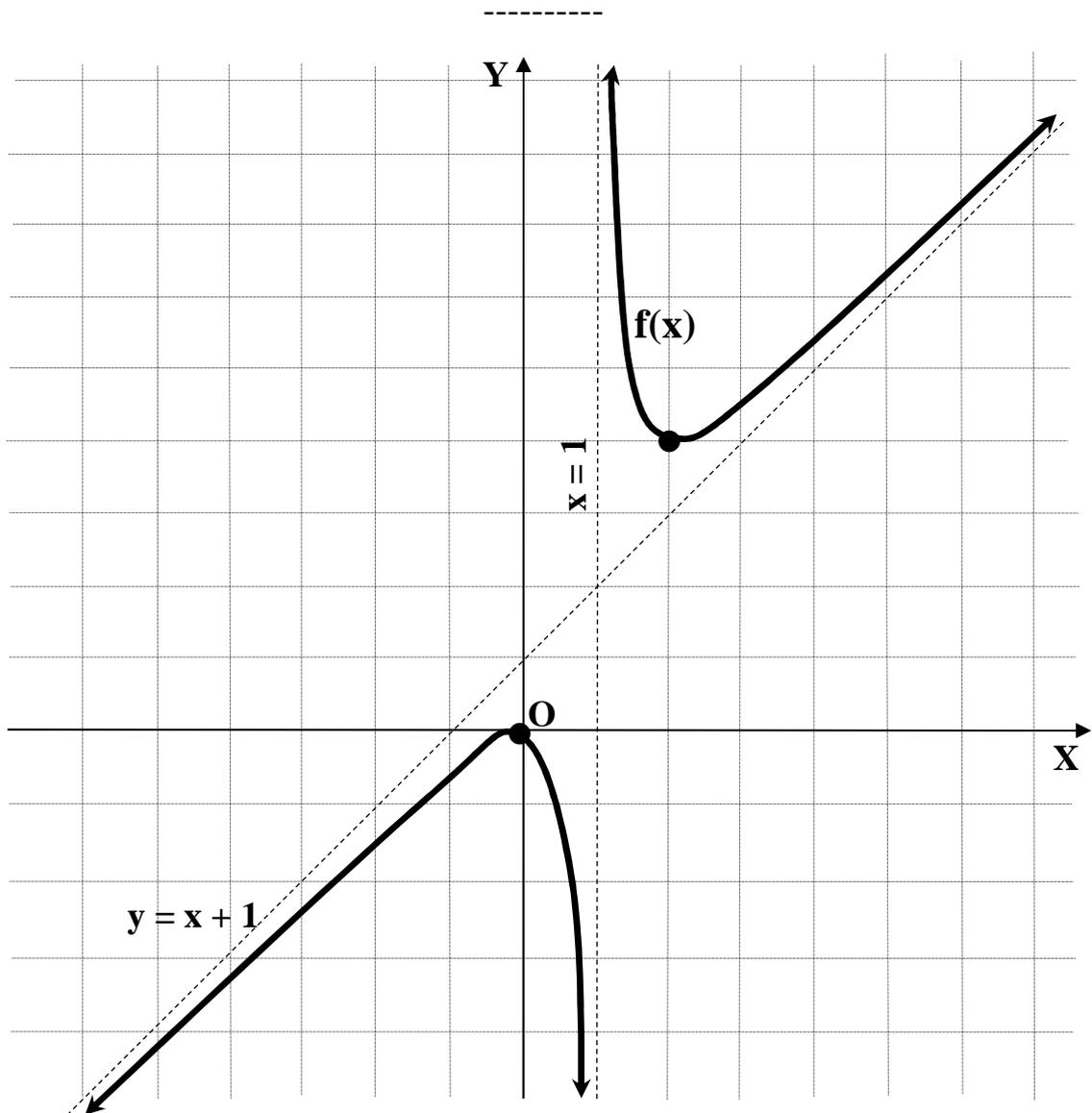
1º) Representar una función que cumpla las siguientes condiciones:

i) *Definición* $(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

ii) Puntos de corte con los ejes: $O(0, 0)$.

iii) Crecimiento: $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$; Decrecimiento: $(0, 1) \cup (1, 2]$; Máximo en $O(0, 0)$
Mínimo en $P(2, 4)$.

iv) Asíntota vertical: $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Asíntota oblicua:
 $y = x + 1$.



2º) Calcular el área encerrada entre la curva $y = e^x$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisa 0 y 1.

Los puntos extremos del segmento son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow y = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{A(0, 1)} \quad ; ; \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow y = e^1 = e \Rightarrow \underline{B(1, e)}$$

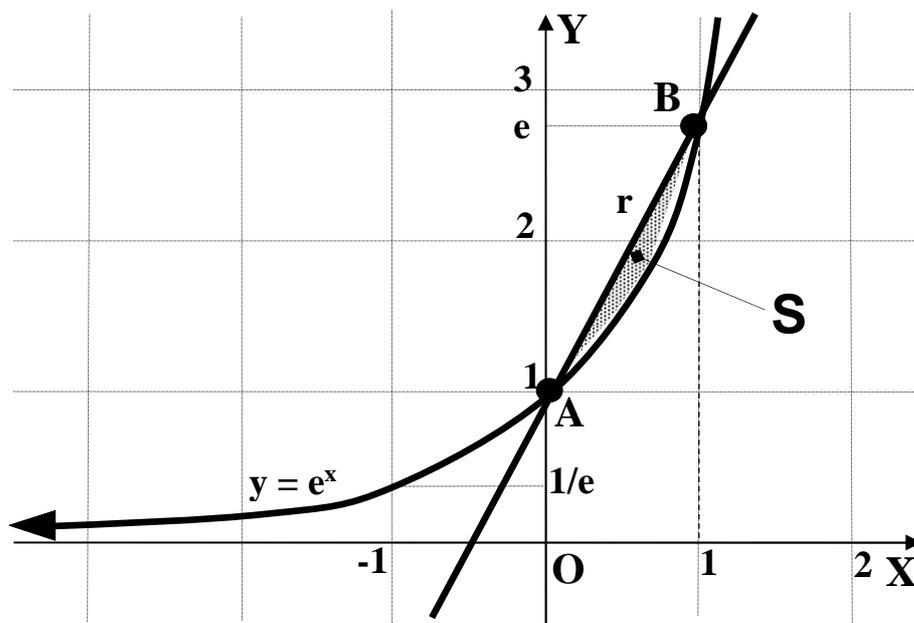
La pendiente de la recta r que pasa por los puntos A y B es la misma que tiene el vector $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (1, e) - (0, 1) = (1, e - 1)$.

$$m = \frac{b}{a} = \frac{e - 1}{1} = \underline{e - 1 = m}$$

La ecuación de la recta r es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow r \equiv y - 1 = (e - 1)(x - 0) = (e - 1)x \quad ; ; \quad \underline{r \equiv y = (e - 1)x + 1}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



Teniendo en cuenta que las ordenadas de la curva son menores o iguales que las de la recta r , el área pedida (la sombreada en la figura) es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (r - e^x) \cdot dx = \int_0^1 [(e - 1)x + 1 - e^x] \cdot dx = \left[\frac{(e - 1)x^2}{2} + x - e^x \right]_0^1 = \left[\frac{e - 1}{2} + 1 - e \right] - [-e^0] = \\ &= \frac{e - 1}{2} + 1 + 1 = \frac{e - 1 + 4}{2} = \frac{3 - e}{2} \cong \underline{\underline{0'141 u^2 = S}} \end{aligned}$$

3º) a) Discutir según los valores de k el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 2 \\ 2x + (2+k)y + 6z = 3 \end{cases} .$$

b) Resolverlo para $k = 0$.

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 2 & 2+k & 6 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 2 & 2+k & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 2 & 2+k & 6 \end{vmatrix} = 0, \forall k \in R \rightarrow (C_3 = 3 \cdot C_1) \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2, \forall k \in R}$$

Vamos a estudiar el rango de M' , para lo cual despreciamos la primera columna:

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 2+k & 3 \end{vmatrix} = 3k + (2+k) + 8 - 2k - 6 - 2(2+k) = k + 2 - (2+k) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2, \forall k \in R}$$

$$\underline{\underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ Incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado, } \forall k \in R}}$$

b)

Para resolver el sistema en el caso de compatible indeterminado, parametrizamos una incógnita, por ejemplo $z = \lambda$ y resolvemos el sistema resultante de eliminar una de las ecuaciones (por ejemplo, la tercera):

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 2 \\ 2x + (2+k)y + 6z = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{k=0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + 2y + 6z = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 - 3\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y = 1 - 3\lambda ; ; 2 - 3\lambda + 2y = 1 - 3\lambda ; ; 2y = -1 ; ; \underline{y = -\frac{1}{2}}$$

Dando valores a λ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}}} ; ; \underline{\underline{\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}}} ; ; \underline{\underline{\lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2 \end{cases}}} \dots\dots\dots$$

4º) a) Estudiar, según los valores del parámetro λ , la posición relativa de los siguientes

$$\text{planos: } \begin{cases} \lambda x - 2y + \lambda z = 0 \\ 10x - y + 5z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

b) Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$ y $C(2, -1, 0)$.

a)

La matriz del sistema es $M = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \lambda + 30\lambda - 40 + 4\lambda - 15\lambda - 20 = 20\lambda - 60 = 20(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 3}$$

Para $\lambda \neq 3$ el sistema es C. D.; los tres planos se cortan en un punto.

(En este caso, por ser un sistema homogéneo, el punto de corte es el origen)

Para $\lambda = 3$ el rango de M es 2 y no existen planos coincidentes:

Para $\lambda = 3$ el sistema es C. I.; los tres planos se cortan en una recta.

b)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 3) - (0, 1, 2) = (1, -1, 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -1, 0) - (0, 1, 2) = (2, -2, -2)$$

El plano π pedido es el que tiene como vectores directores \vec{u} , \vec{v} y contiene a uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo A:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2x - 2(z-2) + 2(y-1) + 2(z-2) + 2x + 2(y-1) = 0 \quad ;;$$

$$4x + 4(y-1) = 0 \quad ;; \quad x + y - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - 1 = 0}}$$
