PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Discutir según los valores de m la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para m = 0 no está definida la función, por lo tanto:

$$\underline{\underline{La \;\; función \;\; es \;\; discontinua \;\; para \;\; m=0.}}$$

Además del valor anterior, el posible punto crítico se produce para x =1:

Para que una función sea continua en un punto tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(3-mx^2\right)=f(1)=\underline{3-m} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{mx}=\underline{\dfrac{2}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3-m=\frac{2}{m} \;;;\; 3m-m^2=2 \;;;$$

$$m^2-3m+2=0 \;;;\; m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1=2} \\ \underline{m_2=1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m=1 \;\; y \;\; m=2 \;\; la \;\; función \;\; es \;\; continua \;\; para \;\; x=1.}}$$

Vamos a estudiar la derivabilidad para x = 1:

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 \ \ si \ \ x\le 1 \\ \dfrac{2}{mx} \quad si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2mx \ \ si \ \ x\le 1 \\ -\dfrac{2}{mx^2} \quad si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=-2m \\ f'(1^+)=-\dfrac{2}{mx^2} \end{cases}$$

$$m=1 \ \Rightarrow \ f'(x)=\begin{cases} -2x \ \ si \ \ x\le 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} \quad si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=-2 \\ f'(1^+)=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(1^-)=f'(1^+)}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ m=1 \ \ la \ \ función \ \ es \ \ derivabable \ \ para \ \ x=1}}$$

$$m=2 \ \Rightarrow \ f'(x)=\begin{cases} -4x \ \ si \ \ x\le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} \quad si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-)=-8 \\ f'(2^+)=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(2^-)\neq f'(2^+)}$$

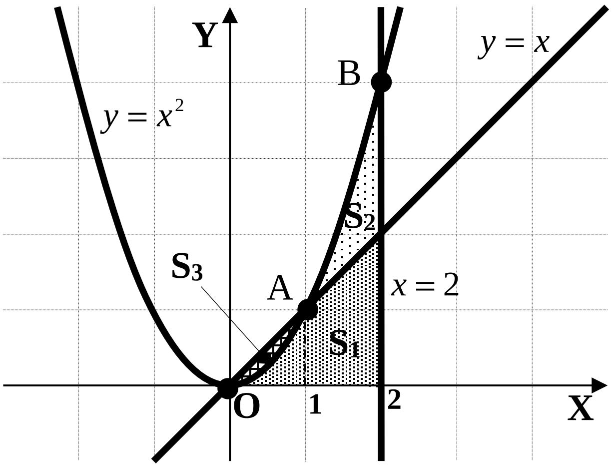
$$\underline{\underline{Para \ \ m=2 \ \ la \ \ función \ \ no \ es \ \ derivabable \ \ para \ \ x=1}}$$

****

2º) a) Dibujar los recintos limitados por la curva $y = x^2$ y las rectas y = x, x = 2.
b) Calcular las áreas de dichos recintos.

----

a)



Los puntos de corte de la curva con las rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x \ ;; \ x^2 - x = 0 \ ;;$$

$$x(x-1) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 4 \ \Rightarrow \ \underline{B(1,\ 4)}$$

b)

$$S_1 = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 x \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \underline{\underline{\frac{11}{6}\ u^2 = S_1}}$$

$$S_2 = \int_1^2 x^2 \cdot dx - \int_1^2 x \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{14-9}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}\ u^2 = S_2}}$$

$$S_3 = \int_0^1 x \cdot dx - \int_0^1 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\ u^2 = S_3}}$$

****

3º) Discutir el sistema $\begin{cases} kx+2z=0 \\ ky-z=k \\ x+3y+z=5 \end{cases}$ según los valores de k y resolverlo en el caso que sea compatible indeterminado.

$$M=\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k+3k=0 \;;;\; k^2+k=0 \;\; k(k+1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{k_1=0} \;;;\; \underline{k_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \; Rango\, M = Rango\; M' = 3 = n^o \; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible \;\; determinado}}$$

$$Para \;\; k=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \;\; de \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; k=0 \;\Rightarrow\; Rango\, M \neq Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

$$Para \;\; k=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow El \;\; rango \;\; de \;\; M' \;\; es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\, C_2,\, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-3=2\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; k=-1 \;\Rightarrow\; Rango\, M = Rango \;\; M' = 2 < n^o \;\; Incóg. \Rightarrow \;\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Para resolver el sistema en el caso de compatible indeterminado, parametrizamos una incógnita, por ejemplo $z=\lambda$ y resolvemos el sistema resultante de eliminar una de las ecuaciones (por ejemplo, la tercera):

$$\begin{cases} -x+2z=0 \\ -y-z=-1 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x+2\lambda=0 \\ -y-\lambda=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=2\lambda} \;;;\; \underline{y=1-\lambda}$$

Dando valores a λ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{\lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}}} \;\; \cdots\cdots$$

****

4º) Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P(2, -4, 0) y contiene a la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ -3x+z=-2 \end{cases}$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ -3x+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda+y=4 \\ -3\lambda+z=-2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \to \underline{y=4-\lambda} \\ \to \underline{z=-2+3\lambda} \end{matrix} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}}$$

Un punto de r es A(0, 4, -2) y un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(1,\ -1,\ 3)$.

El vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AP}=P-A=(2,\ -4,\ 0)-(0,\ 4,\ -2)=(2,\ -8,\ 2)$ también es director del plano π pedido, por lo cual es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-2x+6(y-4)-8(z+2)+2(z+2)+24x-2(y-4)=0 \ ;; \ 22x+4(y-4)-6(z+2)=0 \ ;;$$

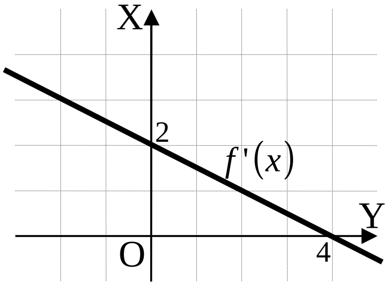
$$22x+4y-16-6z-12=0 \ ;; \ 22x+4y-6z-28=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 11x+2y-3z-14=0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) La siguiente gráfica corresponde a la función f'(x), derivada de la función f(x). Estudiar su monotonía, concavidad y convexidad, extremos relativos y puntos de inflexión de la función interpretada en dicha gráfica.



La función derivada representada en la figura es $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, que es decreciente en su dominio, que es R; esto significa que f(x) es cóncava en su dominio, que también es R.

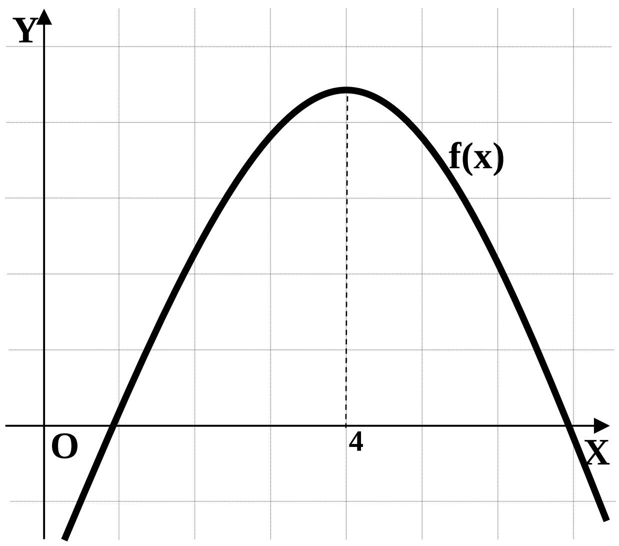
Por ser cóncava en su dominio no tiene puntos de inflexión.

$$Para \;\; x < 4 \;\; es \;\; f'(x) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\underline{f(x) \;\; es \;\; creciente \;\; en \;\; (-\infty, \; 4)}}$$

$$Para \;\; x > 4 \;\; es \;\; f'(x) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\underline{f(x) \;\; es \;\; decreciente \;\; en \;\; (4, \; +\infty)}}$$

La función derivada se anula para x = 4 y en este punto pasa de ser creciente a decreciente, lo cual significa que tiene un máximo absoluto en el punto P[4, f(4)].

La representación gráfica de f(x) es, aproximadamente, la que se indica en la siguiente figura.



****

2º) Calcular la integral $I=\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\cdot dx$.

$$x^2+3x-10=0\ ;;\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=2}\\ \underline{x_2=-5}\end{cases}$$

$$x^2+3x-10=0\ \Rightarrow\ x^2+3x-10=(x-2)(x+5)=0$$

$$\frac{3x}{x^2+3x-10}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{x^2+3x-10}=\frac{Ax+5A+Bx-2B}{x^2+3x-10}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(5A-2B)}{x^2+3x-10}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}A+B=3\\5A-2B=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2A+2B=6\\5A-2B=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 7A=6\ ;;\ \underline{A=\frac{6}{7}}$$

$$A+B=3\ \rightarrow\ \frac{6}{7}+B=3\ ;;\ B=4-\frac{6}{7}=\frac{28-6}{7}=\underline{\frac{22}{7}=B}$$

$$I=\int\frac{3x}{x^2+3x-10}\cdot dx=\int\left(\frac{\frac{6}{7}}{x-2}+\frac{\frac{22}{7}}{x+5}\right)\cdot dx=\frac{6}{7}\int\frac{1}{x-2}\cdot dx+\frac{22}{7}\int\frac{1}{x+5}\cdot dx=$$

$$=\frac{6}{7}L(x-2)+\frac{22}{7}L(x+5)+C=\underline{\underline{\frac{2}{7}[3L(x-2)+11L(x+5)]+C=I}}$$

****

3º) Resolver el sistema matricial: $\left.\begin{array}{l} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} 4X - 2Y = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 5X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;;;$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \;;;\; Y = 2X - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Y}}$$

****

4º) Dados los planos de ecuaciones: $\begin{cases} ax - 2z = 15 \\ 2x + y + z = -7 \\ x + y + az = -8a \end{cases}$, determinar los valores de a para que los tres planos pasen por una recta. Justificar.

Para que los tres planos determinen una recta es necesario que el sistema sea compatible indeterminado, pudiendo diferenciarse los dos siguientes casos:

1.- Que dos planos sean coincidentes y secantes al tercero.

2.- Que los tres planos sean secantes en una recta.

Como podemos observar, no existen dos planos coincidentes, independientemente del valor de a, por lo tanto, se produce la segunda situación.

Como existe una recta, el rango tiene que ser dos y por ser compatible tiene que ser, necesariamente el rango de la matriz de coeficientes igual al rango de la matriz ampliada, o sea: rango M = rango M' = 2.

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \;\;;;\;\; M' = \begin{pmatrix} a & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & a & -8a \end{pmatrix}$$

$$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; a^2 - 4 + 2 - a = 0 \;\;;;\;\; a^2 - a - 2 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 2} \\ \underline{a_2 = -1} \end{cases}$$

$$Para \;\; a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; de \;\; M':$$

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -32 + 30 - 15 + 14 = 44 - 47 = -3 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

Para a = 2 los planos no forman una recta; al ser Rango M' = 3 significa que los planos se cortan dos a dos.

$$Para\ \ a = 2 - 1 \Rightarrow\ M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \ \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M':$$

$$\left.\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 30 - 15 - 7 = 0 \\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 30 + 14 - 15 + 7 + 32 = 0 \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2 & 15 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -15 + 14 - 15 + 16 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 2}$$

<u>Para a = -1 se cumple la condición pedida.</u>

****