PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

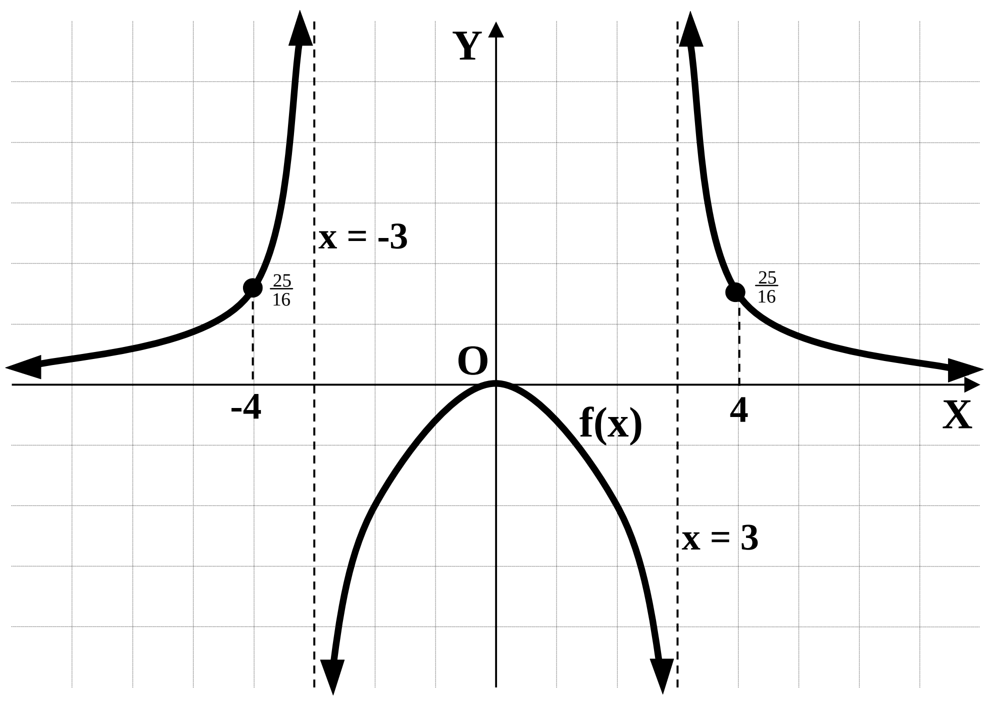
MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de una y otra opción.

OPCIÓN A

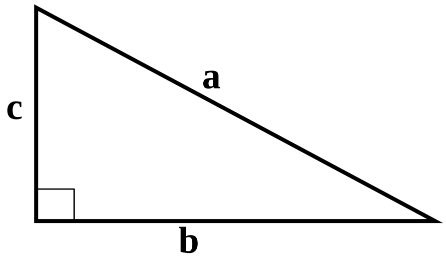
1º) Hacer un esquema de la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades:
a) Tiene dos asíntotas verticales para x = -3 y x = 3.
b) Para $x \to \pm\infty$, se cumple que $f(x) \to 0$.
c) $f(-4) = f(4) = \frac{25}{16}$.
d) Es creciente en $(-\infty, \ -3) \cup (-3, \ 0)$ y es decreciente en $(0, \ 3) \cup (3, \ +\infty)$.
e) $f(0) = 0 \ \ y \ \ f'(0) = 0$.

Una representación aproximada de lo pedido es la siguiente:



****

2º) De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15 cm, hallar las dimensiones de que tenga área máxima.



$$b + c = 15 \;\; ;; \;\; \underline{c = 15 - b}$$

$$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot (15 - b)}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(15b - b^2\right) = S}$$

El área será máxima cuando su derivada sea cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot (15 - 2b) = 0 \;\Rightarrow\; 15 - 2b = 0 \;\; ;; \;\; b = \frac{15}{2} = \underline{7'5 = b}$$

$$c = 15 - b = 15 - 7'5 = \underline{7'5 = c = b}$$

Justificación:

$$S'' = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo, \;\; c.q.j.}}$$

<u>El triángulo de área máxima es un triángulo rectángulo e isósceles de catetos 7’5 u.</u>

****

3º) Estudiar para qué valores de m es inversible la matriz $M=\begin{bmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{bmatrix}$ y, en caso de ser posible, hallar su inversa para m = -1.

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|M|=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix}=m^2-m=0\ ;;\ m(m-1)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} \underline{m_1=0} \\ \underline{m_2=1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Tiene\ \ inversa\ \ \forall m\in R,\ \{m\neq 0;\ m\neq 1\}}}$$

Para m = -1 la matriz resulta: $M=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Vamos a calcular su inversa aplicando el método de Gaus-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to -F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3+F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to -\tfrac{1}{2}F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} F_1\to F_1+F_3 \\ F_2\to F_2-F_3 \end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \end{array}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M^{-1}=\begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+mx-3=0$, estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m, hallar también el punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de m = 1.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+mz=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}=2m+1-2-4+1-m=m-4=0 \;;;\; \underline{m=4}$$

$$\underline{Para\;\; m\neq 4 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Deter\min ado}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m\neq 4\;\; la\;\; recta\;\; r\;\; y\;\; el\;\; plano\;\; \pi\;\; son\;\; \sec antes}}$$

$$Para\;\; m=4 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$Para\;\; m=4\;\; el\;\; rango\;\; de\;\; M'\;\; es:$

$$\left.\begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6+1-4-3=0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3+4+2-3=0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3+8+1-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{Para\;\; m=4 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 2 < n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Ineter\min ado}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m=4\;\; la\;\; recta\;\; r\;\; está\;\; contenida\;\; en\;\; el\;\; plano\;\; \pi}}$$

Para m = 1 la recta es secante al plano, por lo tanto tienen un punto en común que vamos a determinar:

El sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=3 \end{array}\right\}$. Aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2-3-6+1}{2+1-2-4+1-1}=\frac{-6}{-3}=\underline{2=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3-2+3-1}{-3}=\frac{3}{-3}=\underline{-1=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{6+1-4-3}{-3}=\frac{0}{-3}=\underline{0=z}$$

El punto de corte es la solución del sistema, o sea: $\underline{\underline{P(2,\ -1,\ 0)}}$.

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función definida por $f(x)=\begin{cases} sen\ x & (x<0) \\ -x^2+ax+b & (x\geq 0)\end{cases}$ determinar los valores de a y b para que resulte derivable en todos los puntos en que esté definida.

La función es continua y derivable $\forall x\in R$, con la excepción de x = 0, que es dudoso. Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} sen\ x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+ax+b\right)=f(0)=\underline{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si\ \ x<0 \\ -2x+a & si\ \ x\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(0^-\right)=\cos 0=\underline{1} \\ f'\left(0^+\right)=\underline{a}\end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

<u>La función es derivable en R para a = 1 y b = 0.</u>

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ y $g(x) = -x^2 + 6x - 5$, se pide:

a) Representar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte de f(x) con los ejes son:

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \;;\; x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow \underline{A(5,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow \underline{C(0,\ -10)}$

Los puntos de corte de g(x) con los ejes son:

Eje X: $g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \;;\; x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{A(5,\ 0)} \\ \underline{B(1,\ 0)} \end{cases}$

Como puede apreciarse, son los mismos que para f(x), por lo cual, éstos son los puntos de corte de las dos funciones.

Eje Y: $x = 0 \rightarrow \underline{D(0,\ -5)}$

Por ser el coeficiente de x^2 menor que x en ambas funciones, son las dos convexas $(\cap)$, cuyos máximos son:

$f(x)$:

$$f'(x) = -4x + 12 \;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 3} \;;\; f(3) = -18 + 36 - 10 = 8 \Rightarrow \underline{E(3,\ 8)}$$

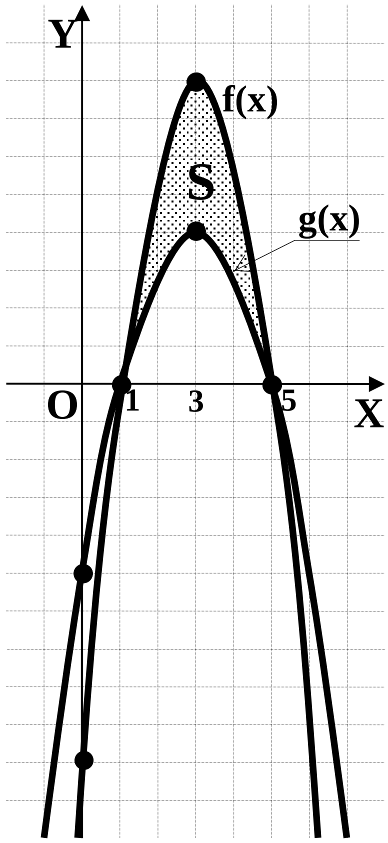
$f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo},\ como\ cabia\ esperar.$

$\underline{g(x)}$:

$$g'(x) = -2x + 6 \;;\; g'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 3} \;;\; g(3) = -9 + 18 - 5 = 4 \Rightarrow \underline{F(3,\ 4)}$$

$g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo},\ como\ cabia\ esperar.$

La representación gráfica de la situación se indica en la figura siguiente:



b)

$$S=\int_1^5\left[f(x)-g(x)\right]\cdot dx=\int_1^5\left[\left(-2x^2+12x-10\right)-\left(-x^2+6x-5\right)\right]\cdot dx=$$

$$=\int_1^5\left(-2x^2+12x-10+x^2-6x+5\right)\cdot dx=\int_1^5\left(-x^2+6x-5\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5=$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+75-25\right)-\left(-\frac{1}{3}+3-5\right)=-\frac{125}{3}+50+\frac{1}{3}+2=52-\frac{124}{3}=\frac{156-124}{3}=\underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2=S}}$$

****

3º) Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro m y resolverlo para m = -2.

$$\left.\begin{array}{r} x+my-z=1 \\ 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=m-1 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m & 2 \\ 2 & -1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2-2m^2+2-m+2m=-2m^2+m+3=0 \;;;\; 2m^2-m-3=0$$

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{1\pm 5}{4}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \underline{m_1=\frac{3}{2}} \\ \underline{m_2=-1} \end{array}\right.$$

$$Para\ \left\{\begin{array}{l} m_1\neq\frac{3}{2} \\ m_2\neq -1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ m=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad Para\ m=\frac{3}{2}\ el\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$\{C_1,\,C_2,\,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}-2+6-2+2-\frac{3}{4}=4-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ M'=3}$$

$$Para\ m=-1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad Para\ m=-1\ el\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$\{C_1,\,C_2,\,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-2-2-4-2+2-4=-12\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ M'=3}$$

$$Para\ \left\{m=\frac{3}{2}\ y\ m=-1\right\}\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ Incompatible$$

Para m = -2 el sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-y-z=-3 \end{array}\right\}.$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-1+2+12-3+2-4}{-1+2-4+1+2-4}=\frac{8}{-4}=\underline{\underline{-2=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-2+6+2+2+6+2}{-4}=\frac{16}{-4}=\underline{\underline{-4=y}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-3-2-4-1+2-12}{-4}=\frac{-20}{-4}=\underline{\underline{5=z}}$$

****

4º) Obtener la ecuación del plano π que pase por el punto P(1, 1, 2) y sea paralelo a las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$.

El plano π puede determinarse por dos vectores directores, uno de cada una de las rectas, y por el punto P.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u} = (-1,\ 1,\ 2)$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = -2 - \lambda \\ -x + y = 1 - 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = -1 - 4\lambda}$$

$$-x + y = 1 - 3\lambda \;;;\; 1 + 4\lambda + y = 1 - 3\lambda \;;;\; \underline{y = -7\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (-4,\ -7,\ 1)$.

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$(x-1) + 7(z-2) - 8(y-1) + 4(z-2) + 14(x-1) + (y-1) = 0 \;;;$$

$$15(x-1) - 7(y-1) + 11(z-2) = 0 \;;;\; 15x - 15 - 7y + 7 + 11z - 22 = 0 \;;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0}}$$

****