

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****SEPTIEMBRE - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los repertorios que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & (x \leq 1) \\ -x^2 + nx & (x > 1) \end{cases}$, se pide:

a) Calcular los valores de los parámetros m y n para que sea continua y derivable en todos los puntos del intervalo $[-20, 20]$.

b) Dibujar esquemáticamente la gráfica de la función, señalando los extremos.

a)

Para que sea continua para $x = 1$ tiene que cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5x + m) = 1 - 5 + m = \underline{m - 4} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + nx) = -1 + n = \underline{n - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow m - 4 = n - 1 ; ; \underline{m - n = 3} \quad (1)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

El único punto a estudiar es el límite de los dos intervalos en que se divide la función definida a trozos que nos atañe, o sea, $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 5(1+h) + m - (1^2 - 5 \cdot 1 + m)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 5 - 5h + m - 1 + 5 - m}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (h-3) = \underline{-3} = f'(1^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h)^2 + n(1+h) - (-1^2 + n \cdot 1)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1 - 2h - h^2 + n + nh + 1 - n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h - h^2 + nh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-2 - h + n)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (-2 - h + n) = \underline{n - 2} = f'(1^+)
 \end{aligned}$$

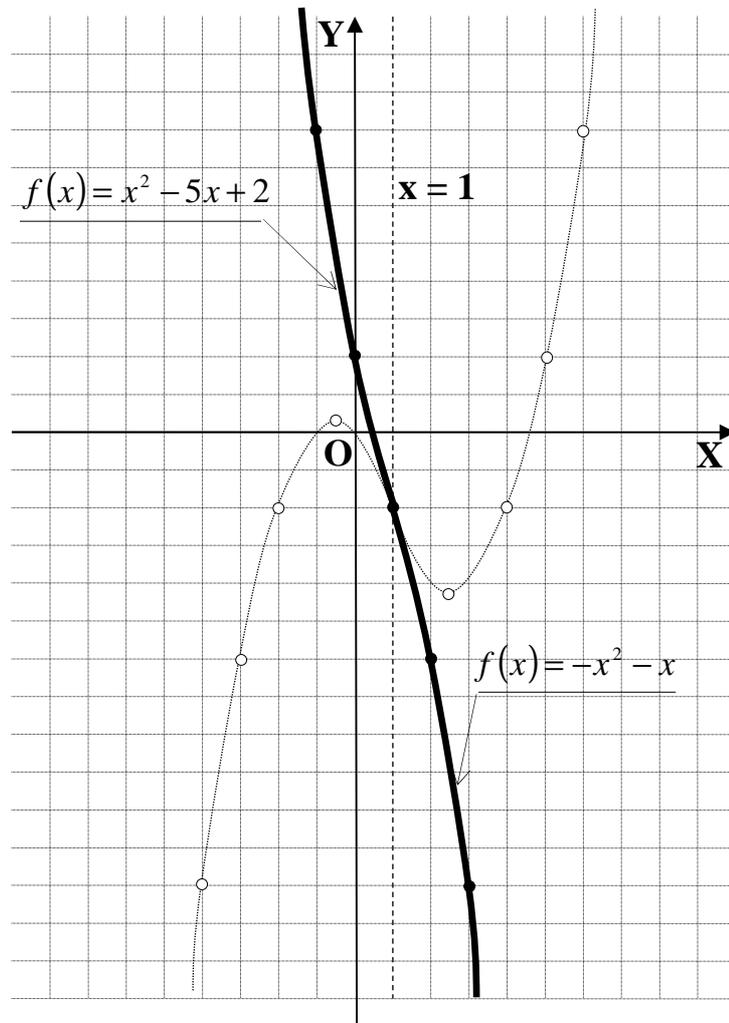
$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -3 = n - 2 \ ; \ ; \ ; \ \underline{\underline{n = -1}}$$

Sustituyendo en (1) el valor de n resulta: $m - n = 3 \ ; \ ; \ ; \ m + 1 = 3 \ ; \ ; \ ; \ \underline{\underline{m = 2}}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & (x \leq 1) \\ -x^2 - xx & (x > 1) \end{cases}$

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

x	f(x)
1	-2
0	2
-1	8



$$f(x) = -x^2 - x$$

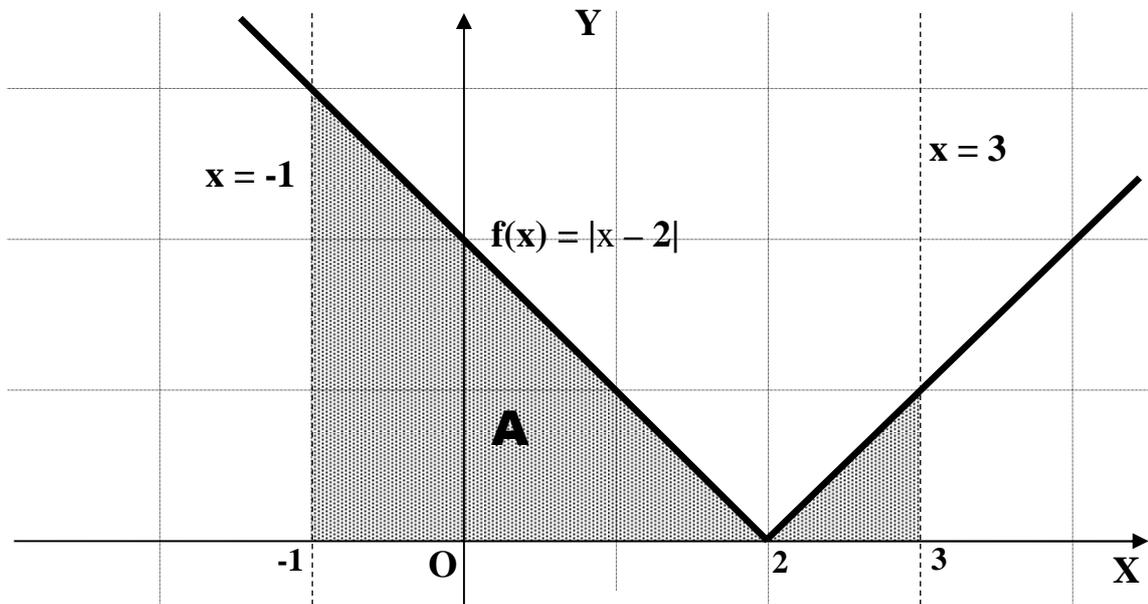
x	f(x)
1	-2
2	-6
3	-12

2º) Representar gráficamente la función $g(x) = |x-2|$ y hallar el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 3$.

La función $g(x)$ se puede redefinir de la forma: $g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, lo cual facilita la comprensión y la resolución del ejercicio.

Formamos una tabla de valores:

x	2	3	0	-1
f(x)	0	1	2	3



$$A = \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 =$$

$$= \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(-2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) = 4 - 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4 = \underline{\underline{5 u^2 = A}}$$

3º) Resolver razonadamente el siguiente sistema, donde A y B son matrices desconocidas, ¿de qué tamaño serán?:

$$\left. \begin{aligned} 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A - 3B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 9A + 6B &= \begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \\ 4A - 6B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 13A = \begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2B = \begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} ;; 2B = \begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}}}$$

4º) Decidir si el plano de ecuación cartesiana $x + y + z = 1$ también viene dado por las

$$\text{ecuaciones paramétricas: } \pi \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda - \mu \\ y = \frac{1}{2} + \lambda - \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertenece al plano π y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, -1, 2)$, la expresión cartesiana o general del plano π es:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y - \frac{1}{2} & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - 1 & 2y - 1 & 2z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ;;$$

$$2(2x - 1) + 2z + 2z + 2(2y - 1) = 0 ;; 4x - 2 + 4z + 4y - 2 = 0 ;; 4x + 4y + 4z - 4 = 0$$

En efecto, $\pi \equiv x + y + z = 1$

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinar los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f(x) pasa por los puntos A(0, 3), B(1, 4) y que la recta $y = 4$ es tangente a dicha gráfica cuando $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ A(0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \underline{\underline{c = 3}}$$

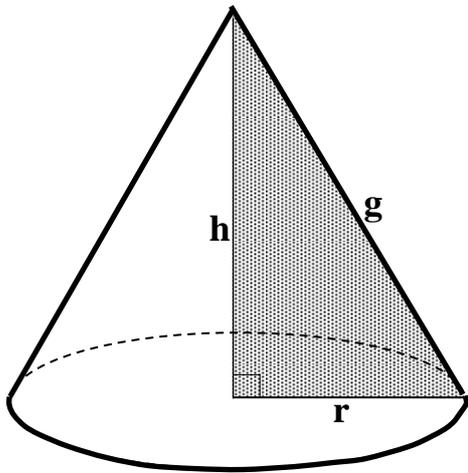
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + 3 \\ B(1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = a + b + 3 = 4 \quad ; ; \quad \underline{a + b = 1} \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + 3 \\ f'(x) = 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1) = \underline{2a + b = 4} \quad (**)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (*) y (**) se obtienen los valores de a y b:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -a - b = -1 \\ 2a + b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}} \quad ; ; \quad a + b = 1 \quad ; ; \quad 3 + b = 1 \quad ; ; \quad \underline{\underline{b = -2}}$$

2º) Hallar las dimensiones (altura h y radio de la base, r) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura más el radio de la base vale 12 metros.



$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \\ r + h = 12 \quad ; ; \quad h = 12 - r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (12 - r) = 4\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V' = 8\pi r - \pi r^2 = \pi r(8 - r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 8 \end{cases}$$

(Es evidente que $r = 0$ es para volumen mínimo)

Vamos a justificar que con $r = 8$ se obtiene un máximo para el volumen:

$$V''(r) = 8\pi - 2\pi r = 2\pi(4 - r) \Rightarrow V''(8) = 2\pi(4 - 8) = -8\pi < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo, c.q.j.}}$$

Las dimensiones son: $r = 8$ cm y $h = 4$ cm.

3º) Se considera la matriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar el valor del parámetro k para que el determinante $|M^2 - kM|$ sea nulo.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}} = M^2$$

$$M^2 - k \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & -2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2-k \\ k-2 & 3-2k \end{pmatrix}$$

$$|M^2 - k \cdot M| = \begin{vmatrix} -1 & 2-k \\ k-2 & 3-2k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1 \cdot (3-2k) - (2-k)(k-2) = 0 \ ; \ ;$$

$$3-2k + (2-k)(k-2) = 0 \ ; \ ; \ 3-2k + 2k - 4 - k^2 + 2k = 0 \ ; \ ; \ -1 + 2k - k^2 = 0 \ ; \ ;$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \ ; \ ; \ (k-1)^2 = 0 \ ; \ ; \ k-1 = 0 \ ; \ ; \ \underline{\underline{k=1}}$$

4º) Calcular el valor de a para que los cuatro puntos siguientes estén en el mismo plano. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(1, 1, a)$.

Vamos a resolver el problema de la forma siguiente: Determinamos el plano π que pasa por los puntos A , B y C y después hacemos que el punto D pertenezca a π .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A &= (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A &= (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1) \end{aligned} \right\} \text{Tomamos, por ejemplo, el punto A:}$$

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad x-1+z+y=0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv x+y+z-1=0}}$$

Para que el punto D pertenezca al plano π es necesario que se cumpla:

$$\left. \begin{aligned} x+y+z-1=0 \\ D(1, 1, a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1+1+a-1=0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{a=-1}}$$
