

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

OPCIÓN A

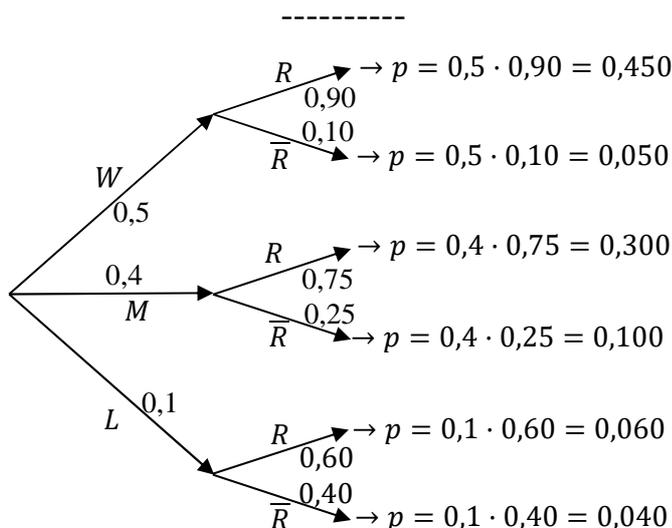
1º) Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50 % de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40 % para MacOS y un 10 % para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90 % de los usuarios de Windows, un 60 % de los de Linux y un 75 % de los de MacOS.

a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario de Linux?

c) Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinión. ¿Cuál es la probabilidad de que el menos uno de ellos sea usuario de Linux?

a)



b)

$$P = P(L/R) = \frac{P(L \cap R)}{P(R)} = \frac{P(L) \cdot P(R/L)}{P(W) \cdot P(R/W) + P(M) \cdot P(R/M) + P(L) \cdot P(R/L)} =$$

$$= \frac{0,1 \cdot 0,60}{0,5 \cdot 0,90 + 0,4 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,60} = \frac{0,060}{0,450 + 0,300 + 0,060} = \frac{0,060}{0,810} = \underline{0,0741}.$$

c)

Se trata de una distribución binomial con los siguientes datos:

$$p = 0,1; \quad q = 0,9; \quad n = 10.$$

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

El suceso contrario a “que al menos uno sea usuario de Linux” es que “ninguno sea usuario de Linux”.

$$P = [1 - P(0)] = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,3487 = \underline{0,6513}.$$

2º) Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza $[0,1804; 0,2196]$, con un nivel de confianza del 95 %. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?

c) Con un nivel de confianza del 99 % y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

a)

$$\bar{x} = \frac{0,2196 + 0,1804}{2} = \frac{0,4000}{2} = 0,2.$$

La proporción de habitantes sin dispositivos móviles es del 20 %.

b)

$$E = \frac{0,2196 - 0,1804}{2} = \frac{0,0392}{2} = 0,0196.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; $E = 0,0196$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \frac{p \cdot q \cdot \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{E^2} = \frac{0,2 \cdot 0,8 \cdot 1,96^2}{0,0196^2} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,8 \cdot 1,96^2}{1,96^2 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,16}{10^{-4}} = 1.600.$$

El tamaño de la muestra ha sido de 1.600 habitantes.

c)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

Datos: $n = 1.600$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$; $E = 0,0196$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p , q y n ,

es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,2 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{1.600}}; 0,2 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{1.600}}\right);$$

$$(0,2 - 2,575 \cdot 0,01; 0,2 + 2,575 \cdot 0,01); (0,2 - 0,0258; 0,20 + 0,0258).$$

$$\underline{I.C._{99\%} = (0,1743; 0,2258)}.$$

3º) El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado en meses es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{2} & 0 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 12x - 26, & 4 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 12 \end{cases} \text{ Justificando las respuestas:}$$

a) Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?

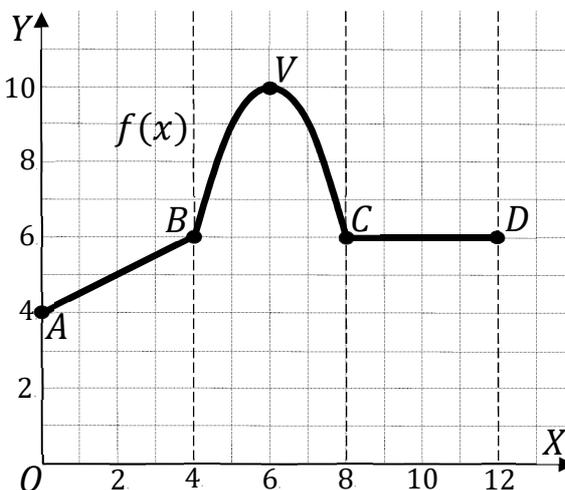
b) Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.

c) ¿Cuándo el beneficio fue igual a 6.000.000 euros?

a)

En el intervalo $[0, 4]$ la función es la recta de expresión $y = \frac{x+8}{2}$, cuyos puntos extremos del intervalo son los puntos $A(0, 4)$ y $B(4, 6)$.

En el intervalo $(4, 8]$ la función es la parábola $f(x) = -x^2 + 12x - 26$, que es cóncava (\cap) por ser negativo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice (máximo) es el siguiente:



$$f'(x) = -2x + 12. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 12 = 0; \quad -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

$$f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 26 = -36 + 72 - 26 = 10 \Rightarrow V(6, 10).$$

Otros puntos de la parábola son $B(4, 6)$ y $C(8, 6)$.

En el intervalo $(8, 12]$ la función es la recta de expresión $y = 6$, cuyos puntos extremos del intervalo son $C(8, 6)$ y $D(12, 6)$.

La representación gráfica aparece en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce que:

El beneficio crece en $(0, 6)$ y decrece en $(6, 8)$.

b)

El beneficio máximo se produce para a los 6 meses y es de 10^7 euros.

El beneficio mínimo se produce al comienzo y es de $4 \cdot 10^6$ euros.

c)

El beneficio fue de $6 \cdot 10^6$ euros para $x = 4$ y $x \in (8, 12)$.

4º) Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2,5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6.200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80 euros, por cada estantería un beneficio de 120 euros y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

a)

Sean x e y las mesas y armarios que fabrica la carpintería, respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y \leq 740 \\ 10x + 60y \leq 6.200 \\ x \geq 50; y \geq 60 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 25x + 60y \leq 7.400 \\ x + 6y \leq 620 \\ x \geq 50; y \geq 60 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 5x + 12y \leq 740 \\ x + 6y \leq 620 \\ x \geq 50; y \geq 60 \end{array} \right\}$$

① $\Rightarrow 5x + 12y \leq 1.480 \Rightarrow y \leq \frac{1.480-5x}{12} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	80	480
y	90	0

② $\Rightarrow x + y \leq 450 \Rightarrow y = 450 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	450
y	400	0

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

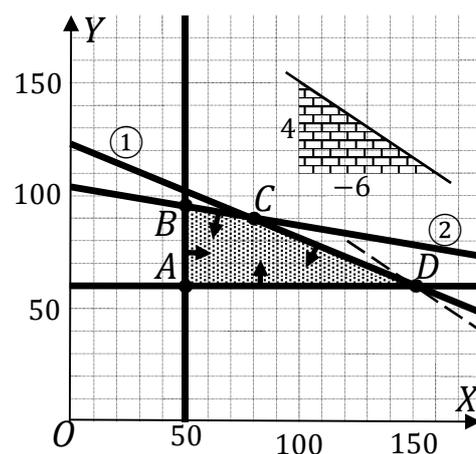
$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow A(50, 60).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 6y = 620 \\ x = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y = 570;$$

$$y = 95 \Rightarrow B(50, 95).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 12y = 1.480 \\ x + 6y = 620 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -5x - 12y = -1.480 \\ 5x + 30y = 3.100 \end{array} \right\} \Rightarrow 18y = 1.620;$$

$$y = \frac{1.620}{18} = 90; x + 540 = 620; x = 80 \Rightarrow C(80, 90).$$



$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 60 \\ 5x + 12y = 1.480 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x = 1.480 - 720 = 760; \quad x = 152 \Rightarrow D(152, 60).$$

b)

La función de objetivos es: $f(x, y) = 80x + 120y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(50, 60) = 80 \cdot 50 + 120 \cdot 60 = 4.000 + 7.200 = 11.200.$$

$$B \Rightarrow f(50, 95) = 80 \cdot 50 + 120 \cdot 95 = 4.000 + 11.400 = 15.400.$$

$$C \Rightarrow f(80, 90) = 80 \cdot 80 + 120 \cdot 90 = 6.400 + 10.800 = 17.200.$$

$$D \Rightarrow f(152, 60) = 80 \cdot 152 + 120 \cdot 60 = 12.160 + 7.200 = 19.360.$$

El máximo se produce en el punto $D(152, 60)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 80x + 120y = 0 \Rightarrow y = -\frac{80}{120}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$$

El máximo máximo se consigue fabricando 152 mesas y 60 armarios.

El beneficio máximo es de 19.360 euros.

OPCIÓN B

1º) Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las principales ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos:

a) Determinar el intervalo de confianza para la media con nivel de confianza del 88 %.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error menor de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95 %?

a)

Para un nivel de confianza del 88 % es:

$$1 - \alpha = 0,88 \rightarrow \alpha = 1 - 0,88 = 0,12 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,06} = 1,555.$$

($1 - 0,06 = 0,9400 \rightarrow z = 1,555$).

$$\text{Datos: } n = 100; \bar{x} = 40; \sigma = 12; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,555.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(40 - 1,555 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}; 40 + 1,555 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(40 - 1,555 \cdot 1,2; 40 + 1,555 \cdot 1,2); (40 - 1,866; 40 + 1,866).$$

$$\underline{I.C._{88\%} = (38,134; 41,866)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

($1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96$).

$$\text{Datos: } \sigma = 12; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96; E = 4.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{12}{4}\right)^2 =$$
$$= (1,96 \cdot 3)^2 = 5,88^2 = 34,57.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 35 trabajadores.

2º) En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.

a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?

b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?

c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que proporciona el ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

a)

Datos: $n = 250$; $\mu = 44$; $\sigma = 18$.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(44, 18)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-44}{18}$.

$$P = P(X > 62) = P\left(Z > \frac{62-44}{18}\right) = P\left(Z > \frac{18}{18}\right) = P(Z > 1) = \\ = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587. \quad N = n \cdot p = 250 \cdot 0,1587 = 39,6.$$

Se espera que 40 empleados tengan más de 62 años.

b)

$$P = P(X < 40) = P\left(Z < \frac{40-44}{18}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{18}\right) = P(Z < -0,22) = \\ = 1 - P(Z < 0,22) = 1 - 0,5871 = 0,4129.$$

$$N = n \cdot p = 250 \cdot 0,4129 = 103,225.$$

Se espera que 103 empleados tengan menos de 40 años.

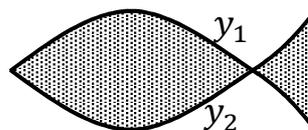
c)

Se da por descontado que los empleados de la empresa son todos mayores de edad, por lo cual podrán tener el carnet de joven los que tengan menos de 30 años.

$$P = P(X < 30) = P\left(Z < \frac{30-44}{18}\right) = P\left(Z < \frac{-14}{18}\right) = P(Z < -0,78) = \\ = 1 - P(Z < 0,78) = 1 - 0,7823 = 0,2177. \quad N = n \cdot p = 250 \cdot 0,2177 = 54,425.$$

Podrán obtener el carnet de joven 54 empleados.

3º) En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va a construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas de ecuaciones $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5$ e $y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5$, entre $x = 0$ y $x = 12$. Los valores de x e y se expresan en metros.



a) Determinar la superficie de la figura.

b) Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra un metro cuadrado de superficie en 1,5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120 euros. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir un metro cuadrado de superficie y cobra a la hora 85 euros. Asimismo, la empresa A cobra 10 euros por metro cuadrado de piedra, mientras que la empresa B cobra 12 euros por metro cuadrado por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?

a)

Los puntos de corte de ambas parábolas tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualdad de sus expresiones:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -\frac{1}{10}x^2 + x + 5 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5; \frac{1}{5}x^2 - 2x = 0; x^2 - 10x = 0;$$

$$x(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0, 5) \\ x_2 = 10 \rightarrow B(10, 5) \end{cases} (*)$$

$$(*) y_1(10) = -\frac{1}{10} \cdot 10^2 + 10 + 5 = -10 + 15 = 5.$$

De la observación de la figura, teniendo en cuenta que el dominio de la función es $(0, 12)$, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{10} (y_1 - y_2) \cdot dx + \int_{10}^{12} (y_2 - y_1) \cdot dx = \\ &= \int_0^{10} \left[\left(-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \right) - \left(\frac{1}{10}x^2 - x + 5 \right) \right] \cdot dx + \\ &+ \int_{10}^{12} \left[\left(\frac{1}{10}x^2 - x + 5 \right) - \left(-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 \right) \right] \cdot dx = \\ &= \int_0^{10} \left(-\frac{1}{5}x^2 + 2x \right) \cdot dx + \int_{10}^{12} \left(\frac{1}{5}x^2 - 2x \right) \cdot dx = \\ &= \left[-\frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_{10}^{12} = \left[-\frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^{10} + \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{10}^{12} = \\ &= \left[\left(-\frac{10^3}{15} + 10^2 \right) - 0 \right] + \left[\left(\frac{12^3}{15} - 12^2 \right) - \left(\frac{10^3}{15} - 10^2 \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1.000}{15} + 100 + \frac{1.728}{15} - 144 - \frac{1.000}{15} + 100 = 56 - \frac{2.000+1.728}{15} = 56 - \frac{272}{15} =$$

$$= \frac{840-272}{15} = \frac{568}{15}.$$

$$\underline{S = \frac{568}{15} m^2 \cong 37,87 m^2.}$$

b)

Empresa A:

Trabajo: $S \cdot 1,5 \cdot 120 = 37,87 \cdot 180 = 6.816,6 \text{ euros.}$

Material: $S \cdot 10 = 37,87 \cdot 10 = 378,7 \text{ euros.}$

Total: Trabajo + Material = 6.816,6 + 378,7 = 7.195,3 euros.

Empresa B:

Trabajo: $S \cdot 2 \cdot 85 = 37,87 \cdot 170 = 6.437,9 \text{ euros.}$

Material: $S \cdot 12 = 37,87 \cdot 12 = 454,44 \text{ euros.}$

Total: Trabajo + Material = 6.437,9 + 454,44 = 6.892,34 euros.

Como se aprecia, la empresa B realiza el trabajo con menor coste.

4º) En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20 % del alumnado de ESO, con el 20 % del alumnado de Bachillerato y el 40 % del alumnado de Ciclos formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20 % del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de la ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1.115 alumnos:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

a)

Sean x, y, z los alumnos que tiene el centro de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} 0,2x + 0,2y + 0,4z &= 42 + 0,2 \cdot (x + y + z) \\ x + \frac{z}{2} &= y - 40 \\ x + y + z &= 1.115 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 420 + 2 \cdot 1.115 \\ 2x + z &= 2y - 80 \\ x + y + z &= 1.115 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x + y + 2z &= 210 + 1.115 \\ 2x - 2y + z &= -80 \\ x + y + z &= 1.115 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + 2z &= 1.325 \\ 2x - 2y + z &= -80 \\ \underline{x + y + z} &= \underline{1.115} \end{aligned} \right\}$$

b)

Restando miembro a miembro a la primera ecuación la tercera:

$$z = 1.325 - 1.115 = 210.$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + 420 &= 1.325 \\ 2x - 2y + 210 &= -80 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x + y &= 905 \\ 2x - 2y &= -290 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x + y &= 905 \\ x - y &= -145 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x = 760;$$

$$x = 380. \quad 380 + y = 905 \Rightarrow y = 525.$$

Hay 380 alumnos de ESO, 525 de Bachillerato y 210 de Ciclos Formativos.
