# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CANARIAS

# JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

## OPCIÓN A

1º) A partir de una muestra de 100 usuarios del servicio de deportes, se estima que el valor medio de edad de estos usuarios está entre 22,83 y 27,17 años (ambos incluidos). Suponiendo que esta variable es normal, con una desviación típica de 10 años:

$a$) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

$b$) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

$c$) Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado $a$), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 16 usuarios del servicio de deportes sea menor o igual que 24 años?

----------

$a$)

$$\overline{x} = \frac{27{,}17+22{,}83}{2} = \frac{50}{2} = \underline{25\ años}.$$

$b$)

$$E = \frac{27{,}17-22{,}83}{2} = \frac{4{,}34}{2} = 2{,}17.$$

Datos: $n = 100;\ \ \sigma = 10;\ \ E = 2{,}17.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2{,}17\cdot\sqrt{100}}{10} = 2{,}17.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,1)$ a 2,17 le corresponde el valor de 0,9850, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9850 = 0{,}0150 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0{,}0150 = 0{,}03.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 97\ \%.}$$

$c)$

$Datos$: $n = 16$; $\mu = 25$; $\sigma = 10$.

$$N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(25;\ \frac{10}{\sqrt{16}}\right) = N\left(25;\ \frac{10}{4}\right) = N(25;\ 2{,}5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-25}{2{,}5}$.

$$P = P(Z \leq 24) = P\left(Z \leq \frac{24-25}{2{,}5}\right) = P\left(Z \leq \frac{-1}{2{,}5}\right) = P(Z \leq -0{,}4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq -0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446.$$

<u>*La probabilidad pedida es del* 34,46 %.</u>

**********

2º) El 20 % de los habitantes de cierta población dice siempre la verdad y otro 20 % miente siempre. El 75 % de los que dicen siempre la verdad son felices; mientras son felices el 50 % de los mentirosos y el 20 % del resto de la población.

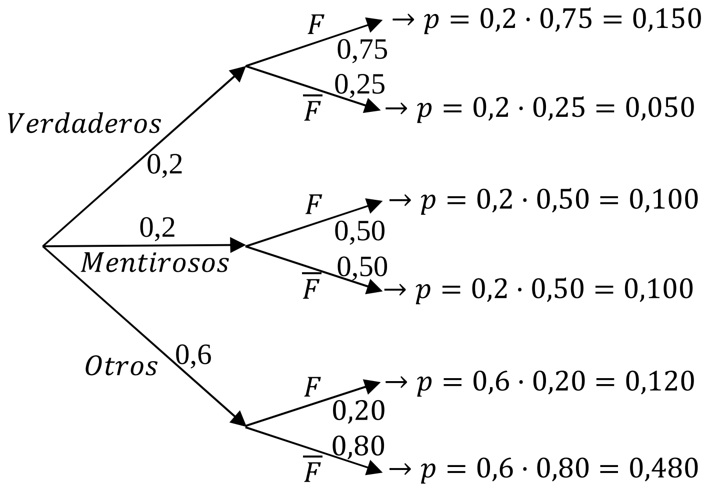
$a$) Construir el árbol de probabilidades.

$b$) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea feliz.

$c$) Se ha elegido una persona al azar, que resulta ser feliz, ¿cuál es la probabilidad de que diga siempre la verdad?

----------

$a$)




$b$)

$$P = P(\overline{F}) = P(V \cap \overline{F}) + P(M \cap \overline{F}) + P(O \cap \overline{F}) =$$

$$= P(V) \cdot P(\overline{F}/V) + P(M) \cdot P(\overline{F}/M) + P(O) \cdot P(\overline{F}/O) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}50 + 0{,}6 \cdot 0{,}80 = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}48 = \underline{0{,}63}.$$

$c$)

$$P = P(V/F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{P(V) \cdot P(F/V)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}63} = \frac{0{,}150}{0{,}370} = \underline{0{,}4054}.$$

**********

3º) El rendimiento, en tanto por ciento, de un jugador de fútbol, depende de la cantidad de minutos que esté jugando. Si la duración de un partido es de 90 minutos y la función que da el rendimiento en función de esos minutos es $R(t)=-\frac{1}{20}t^2+2t+80$.

$a$) ¿En qué momento el jugador tiene mayor rendimiento? ¿Cuál es dicho rendimiento?

$b$) ¿En qué momento el jugador tiene el mismo rendimiento que cuando comenzó el partido?

$c$) Si el entrenador quiere cambiarlo cuando está al 20 % de su rendimiento, ¿en qué minuto debe cambiarlo?

----------

$a$)

Para que una función tenga un máximo relativo tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$R'(t)=-\frac{1}{10}t+2. \qquad R''(t)=-\frac{1}{10}<0 \Rightarrow Máximo.$$

$$R'(t)=0 \Rightarrow -\frac{1}{10}t+2=0;\ -t+20=0 \Rightarrow t=20.$$

$$\underline{Alcanza\ el\ máximo\ rendimiento\ a\ los\ 20\ minutos}.$$

$$R(20)=-\frac{1}{20}\cdot 20^2+2\cdot 20+80=-20+40+80=100.$$

$$\underline{El\ rendimiento\ máximo\ es\ del\ 100\ \%}.$$

$b$)

El rendimiento al comienzo es: $R(0)=80$.

$$R(t)=80 \Rightarrow -\frac{1}{20}t^2+2t+80=80;\ -\frac{1}{20}t^2+2t=0;\ -t^2+40t=0;$$

$$-t(t-40)=0 \Rightarrow t_1=0, t_2=40.$$

$$\underline{Alcanza\ el\ mismo\ rendimiento\ que\ al\ principio\ a\ los\ 40\ minutos}.$$

$c$)

$$R(t)=20 \Rightarrow -\frac{1}{20}t^2+2t+80=20;\ -\frac{1}{20}t^2+2t+60=0;$$

$$t^2-40t-1.200=0;\ \ t=\frac{40\pm\sqrt{1.600+4.800}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{6.400}}{2}=\frac{40\pm 80}{2}=20\pm 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1=-20, t_2=60.$$

La solución negativa carece de sentido lógico.

$$\underline{Debe\ cambiar\ al\ futbolista\ a\ los\ 60\ minutos}.$$

**********

4º) En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80 % del resto.

$a$) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

$b$) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

----------

$a$)

Sean $x, y, z$ los estudiantes, empleados y sin ocupación del grupo de personas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=288 \\ 5x=3y \\ z=80\ \%\ de\ (x+y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=288 \\ 5x-3y=0 \\ z=0{,}8(x+y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=288 \\ 5x-3y=0 \\ 10z=8x+8y \end{array}\right\}.$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=288 \\ 5x-3y=0 \\ 4x+4y-5z=0 \end{array}\right\}.}$$

$b$)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 15+20+12+25 = 72 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.C.D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 288 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{72} = \frac{288 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{72} = 4 \cdot 15 = 60.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 288 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{72} = \frac{-288 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{72} = -4 \cdot (-25) = 100.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 288 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{72} = \frac{288 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{72} = 4 \cdot (20+12) = 4 \cdot 32 = 128.$$

$\underline{En\ el\ grupo\ hay\ 60\ estudiantes, 100\ empleados\ y\ 128\ no\ tienen\ ocupación.}$

**********

OPCIÓN B

1º) Un estudio realizado sobre 600 personas de una ciudad indica que 360 consultan 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas.

$a$) Con una confianza del 97 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de personas que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas.

$b$) Si para estimar la proporción de personas que consulta 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas se obtiene el intervalo $[0{,}5424; 0{,}6576]$, ¿cuál es el nivel de confianza utilizado?

$c$) Si la población de la ciudad es de 10.000 personas, usando el nivel de confianza del apartado $b$), ¿entre qué límites está el número de los que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas?

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1-\alpha=0{,}97 \rightarrow \alpha=1-0{,}97=0{,}03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$
$1-0{,}015=0{,}9850 \rightarrow z=2{,}17).$

$Datos: p=\frac{600-360}{600}=\frac{240}{360}=0{,}4;\ \ q=0{,}6;\ \ n=600;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}};\ p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}4-2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{600}};\ 0{,}4+2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{600}}\right);$$

$(0{,}4-2{,}17\cdot 0{,}02;\ 0{,}4+2{,}17\cdot 0{,}02);\ \ (0{,}4-0{,}0434;\ 0{,}4+0{,}0434).$

$$\underline{I.C._{97\ \%}=(0{,}3566;\ 0{,}4434)}.$$

$b$)

$E=\frac{0{,}6576-0{,}5424}{2}=\frac{0{,}1152}{2}=0{,}0576.$

Datos: $n=600;\ \ \sigma=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{600}}=0{,}02;\ \ E=0{,}0576.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{E}{\sigma}=\frac{0{,}0576}{0{,}02}=2{,}88.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,1)$ a 2,88 le corresponde el valor de 0,9980, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9980 = 0{,}0020 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0{,}0040 = 0{,}004.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99{,}60\ \%.}$$

$c)$

En principio se nos pide un intervalo de confianza:

$Datos: p = 0{,}4;\ \ \sigma = 0{,}02;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, \sigma\ y\ z_{\frac{\alpha}{2}}$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right)$.

$(0{,}4 - 2{,}88 \cdot 0{,}02;\ 0{,}4 + 2{,}88 \cdot 0{,}02);\ \ (0{,}4 - 0{,}0576;\ 0{,}4 + 0{,}0576) \Rightarrow$

$\Rightarrow I.C._{97\ \%} = (0{,}3424;\ 0{,}4576).$

Multiplicando los extremos del intervalo por 10.000:

$$\underline{Consultan\ el\ teléfono\ entre\ 3.424\ y\ 4.576\ con\ nivel\ de\ confianza\ del\ 99{,}8\ \%.}$$

**********

2º) El tiempo que tardan en descargarse las baterías de un dispositivo electrónico es una variable con distribución normal de media 3,8 días y desviación típica 1 día. Si se manejas baterías de ese dispositivo, calcular:

$a$) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 16 baterías este entre 4,1 y 4,3 días.

$b$) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 25 baterías no sea mayor que 3,35 días.

----------

$a$)

$Datos: n = 16;\ \mu = 3{,}8;\ \ \sigma = 1.$

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(3{,}8;\ \frac{1}{\sqrt{16}}\right) = N\left(3{,}8;\ \frac{1}{4}\right) = N(3{,}8;\ 0{,}25).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3{,}8}{0{,}25}.$

$P = P(4{,}1 \leq X \leq 4{,}3) = P\left(\frac{4{,}1-3{,}8}{0{,}25} \leq Z \leq \frac{4{,}3-3{,}8}{1}\right) = P\left(\frac{0{,}3}{0{,}25} \leq Z \leq \frac{0{,}5}{0{,}25}\right) =$

$= P(1{,}2 \leq Z \leq 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1{,}2) = 0{,}9772 - 0{,}8849 = \underline{0{,}0923}.$

$b$)

$Datos:\ \mu = 3{,}8;\ \ n = 25;\ \ \sigma = 1.$

Tipificando la variable:

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(3{,}8;\ \frac{1}{\sqrt{25}}\right) = N(3{,}8;\ 0{,}2).$

$P = P(Z > 3{,}35) = P\left(Z > \frac{3{,}35-3{,}8}{0{,}2}\right) = P\left(Z > \frac{-0{,}45}{0{,}2}\right) = P(Z > -2{,}25) =$

$= 1 - P(Z \leq 2{,}25) = 1 - 0{,}9878 = \underline{0{,}0122 = 1{,}22\ \%}.$

**********

3º) El recubrimiento de lona de una terraza tiene una zona deteriorada cuya superficie está limitada por $y = f(x) = (x-2)^2$ e $y = g(x) = -4x + 8$. Si se mide en metros, se pide:

$a$) Representar la zona deteriorada.

$b$) Para repararla, se ha de utilizar lona cuyo coste (incluido trabajo de reparación) es de 18 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte de lona adquirida, ¿cuánto costará la reparación?

----------

$a$)

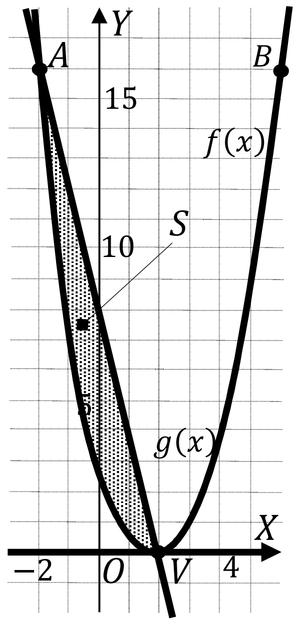
La función $y = (x-2)^2$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el punto $V(0, 2)$ y que corta al eje de ordenadas en el punto $A(0, 4)$.

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-2)^2 \\ y = -4x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 = -4x + 8;\ \ x^2 - 4x + 4 =$$

$$= -4x + 8;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -2 \rightarrow B(-2, 16) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2, 0) \end{array}\right\}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.




$b$)

De la observación de la figura se deduce la superficie útil a calcular, que es la siguiente:

$$S_{útil} = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} [(-4x + 8) - (x-2)^2] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} [-4x + 8 - (x^2 - 4x + 4)] \cdot dx = \int_{0}^{2} (-x^2 + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\ m^2.$$

Como se desperdicia un tercio de la superficie, la superficie útil representa dos tercios de la superficie total:

$$S_{út} = \frac{2}{3} S_T \Rightarrow S_T = \frac{3}{2} S_{út} = \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{3} = 16\ m^2\ \Rightarrow\ \underline{Coste = 16 \cdot 18 = 288\ euros}.$$

**********

4º) La encargada de una floristería ha de hacer un pedido semanal de plantas de interior y plantas de exterior. Al proveedor le paga 1 euro por cada planta de interior y 2 euros por cada planta de exterior. Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido se supone unos costes, que son de 0,60 euros por cada planta de interior y 0,80 euros por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48 euros de costos de transporte por cada pedido semanal. Por otro lado, la encargada recibe una prima de 0,60 euros por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50 euros por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido.

$a$) Si quiere minimizar el precio que le tiene que pagar al proveedor, formular el correspondiente problema. Dibujar la región factible.

$b$) Resolver el problema planteado en $a$) calculando también cuánto le paga al proveedor y cuánto es el gasto de transporte.

----------

$a$)

Sean $x$ e $y$ el número de plantas de interior y exterior que componen el pedido semanal, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 0,6x + 0,8y \leq 48 \\ 0,6x + 0,5y \geq 30 \\ x \geq 20;\ y \geq 30 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y \leq 240 \\ 6x + 5y \geq 300 \\ x \geq 20;\ y \geq 30 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 3x + 4y \leq 240 \Rightarrow y \leq \frac{240-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

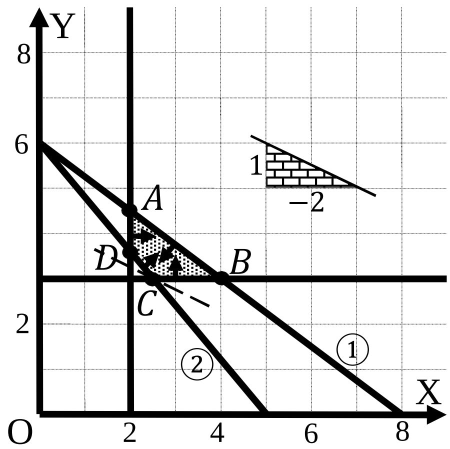
| x | 0 | 80 |
|---|---|---|
| y | 60 | 0 |

$② \Rightarrow 6x + 5y \geq 300 \Rightarrow y \geq \frac{300-6x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

| x | 0 | 50 |
|---|---|---|
| y | 60 | 0 |

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:




$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ 3x + 4y = 240 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 + 4y = 240;$

$4y = 180;\ \ y = 45 \Rightarrow A(20, 45).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 30 \\ 3x + 4y = 240 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x + 120 = 240;$

$3x = 120;\ \ x = 40 \Rightarrow B(40, 30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 30 \\ 6x + 5y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x + 150 = 300;\ \ 6x = 150;\ \ x = 25 \Rightarrow C(25, 30).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ 6x + 5y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 120 + 5y = 300;\;\; 5y = 180;\;\; y = 36 \Rightarrow C(20, 36).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, 45) = 20 + 2 \cdot 45 = 20 + 90 = 110.$

$B \Rightarrow f(40, 30) = 40 + 2 \cdot 30 = 40 + 60 = 100.$

$C \Rightarrow f(25, 30) = 25 + 2 \cdot 30 = 25 + 60 = 85.$

$D \Rightarrow f(20, 36) = 20 + 2 \cdot 36 = 20 + 72 = 92.$

El mínimo se produce en el punto $C(25, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto $C$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$$\underline{El\ mínimo\ coste\ lo\ obtiene\ con\ 25\ plantas\ de\ interior\ y\ 30\ de\ exterior.}$$

$b)$

$$\underline{Le\ paga\ al\ proveedor\ 85\ euros.}$$

$Transporte = 0{,}6 \cdot 25 + 0{,}8 \cdot 30 = 15 + 24 = 39.$

$$\underline{Los\ costes\ del\ transporte\ ascienden\ a\ 39\ euros.}$$

**********