# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CANARIAS

# JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS                    Tiempo máximo:   1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

## OPCIÓN A

1º) De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

$a$) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?

$b$) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?

$c$) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

----------

Se trata de una distribución binomial con $p = 0{,}1; q = 0{,}9\ y\ n = 400$.

Por ser $n$ suficientemente grande se cumple que $n \cdot p > 5\ y\ n \cdot q > 5$, por lo cual se puede aproximar la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}1 = 40;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 6.$$

$$X = B(400;\ 0{,}1) \approx N(40, 6).$$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-40}{6}$.

$a$)

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40-40}{6}\right) = P(Z \leq 0) = \underline{0{,}5}.$$

$b$)

$$P(39{,}5 \leq X \leq 40{,}5) = P\left(\frac{39{,}5-40}{6} \leq Z \leq \frac{40{,}5-40}{6}\right) = P\left(\frac{-0{,}5}{6} \leq Z \leq \frac{0{,}5}{6}\right) =$$

$= P(-0{,}08 \leq Z \leq 0{,}08) = P(Z \leq 0{,}08) - P(Z \leq -0{,}08) =$

$= P(Z \leq 0{,}08) - [1 - P(Z \leq 0{,}08)] = 2 \cdot P(Z \leq 0{,}08) - 1 = 2 \cdot 0{,}5319 - 1 =$

$= 1{,}0638 - 1 = \underline{0{,}0638}.$

$c)$

$$P(40 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{40-40}{6} \leq Z \leq \frac{50-40}{6}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{3}\right) =$$

$= P(Z \leq 1{,}67) - P(Z \leq 0) = 0{,}9525 - 0{,}5 = \underline{0{,}4525}.$

**********

2º) Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

$a$) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95 % para la distancia media en km recorrido por un taxi en un día.

$b$) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99 %.

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=96;\ \ \overline{x}=240;\ \sigma=60;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(240-1{,}96\cdot\frac{60}{\sqrt{96}};\ 240+1{,}96\cdot\frac{60}{\sqrt{96}}\right);$

$(240-1{,}96\cdot 6{,}1237;\ 240+1{,}96\cdot 6{,}1237);\ \ (240-12{,}0025;\ 240+12{,}0025).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(227{,}7997;\ 252{,}0025).}$$

$b$)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$1-0{,}005=0{,}9950 \ \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=60;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ \ E=10.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{60}{10}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 6)^2=15{,}45^2=238{,}70.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 239\ taxis.}$$

**********

3º) Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entra las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

$a$) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.

$b$) El coste del espejo es de 16,25 euros el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24 % de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 euros, ¿a cuánto asciende el coste total?

----------

$a$)

Los puntos de intersección de la función $y = -x^2 + 14x - 41$ con la recta dada $y = 4$ son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} y = -x^2 + 14x - 41 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 14x - 41 = 4;\ \ x^2 - 14x + 45 = 0;$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-180}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = 7 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \to A(5,4) \\ x_2 = 9 \to B(9,4) \end{cases}.$$

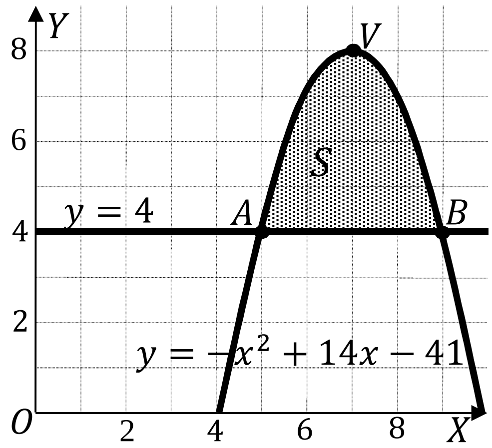
El vértice de la parábola es el siguiente:

$$y' = -2x + 14 = 0 \to x = 7.$$

$$y_{(7)} = -7^2 + 14 \cdot 7 - 41 =$$

$$= -49 + 98 - 41 = 8 \Rightarrow V(7,8).$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.




$$S = \int_5^9 [(-x^2 + 14x - 41) - 4] \cdot dx = \int_5^9 (-x^2 + 14x - 45) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 45x\right]_5^9 = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x^2 - 45x\right]_5^9 = \left(-\frac{9^3}{3} + 7 \cdot 9^2 - 45 \cdot 9\right) -$$

$$-\left(-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5\right) = -243 + 567 - 405 + \frac{125}{3} - 175 + 225 =$$

$$= 792 - 823 + \frac{125}{3} = \frac{125}{3} - 31 = \frac{125-93}{3} = \underline{\frac{32}{3}\ u^2 \cong 10{,}67\ u^2}.$$

$b$)

Precio del espejo: $P = 16{,}25 \cdot S = 16{,}25 \cdot \frac{32}{3} = 173{,}33$ euros.

Precio mano obra: $M_o = 24\ \%\ de\ P = 0{,}24 \cdot P = 0{,}24 \cdot 173{,}33 = 41{,}6$ euros.

Precio del transporte: $T = 85$ euros.

Precio total: $P_T = P + M_o + T = 173{,}33 + 41{,}6 + 85 = 299{,}93$.

$$\underline{El\ coste\ total\ del\ espejo\ es, aproximadamente, de\ 300\ euros.}$$

**********

4º) Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 euros, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 euros, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

$a$) Plantear el correspondiente problema y representar la región factible.

$b$) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de ingresos?

----------

$a$)

Sean $x$ $e$ $y$, el número de declaraciones a personas físicas y pymes que realiza el asesor fiscal, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que resulta es: $\left.\begin{array}{r} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ 3x + 6y \leq 360 \\ x + 4y \leq 210 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ x + 2y \leq 120 \\ x + 4y \leq 210 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x + 2y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

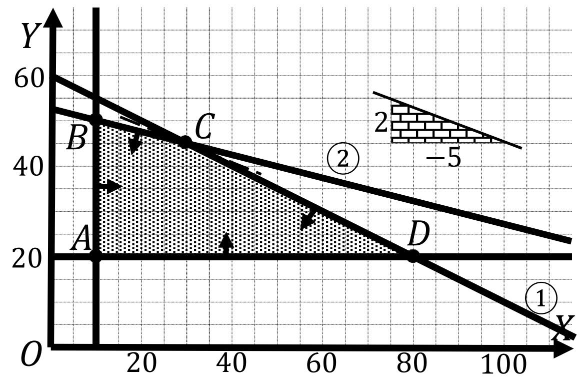
| x | 60 | 100 |
|---|---|---|
| y | 30 | 10 |

② $\Rightarrow x + 4y \leq 210 \Rightarrow y \leq \frac{210-x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| x | 90 | 30 |
|---|---|---|
| y | 30 | 45 |

La región factible es la que aparece sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:




$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(10, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ x + 4y = 210 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 + 4y = 210;$

$4y = 200;\ \ y = 50 \Rightarrow B(10, 50).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 120 \\ x + 4y = 210 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x - 2y = -120 \\ x + 4y = 210 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 90;\ \ y = 45 \Rightarrow C(30, 45).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 120 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 40 = 120 \Rightarrow D(80, 20).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,y) = 120x + 300y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,20) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 20 = 1.200 + 6.000 = 7.200.$

$B \Rightarrow f(10,50) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 50 = 1.200 + 15.000 = 16.200.$

$C \Rightarrow f(30,45) = 120 \cdot 30 + 300 \cdot 45 = 3.600 + 13.500 = 17.100.$

$D \Rightarrow f(80,20) = 120 \cdot 80 + 300 \cdot 20 = 9.600 + 6.000 = 15.600.$

El valor máximo se produce en el punto $C(30,45)$.

También se hubiera obtenido el punto $C$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 120x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{120}{300}x = -\frac{2}{5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$

$\underline{La\ solución\ óptima\ es\ hacer\ 30\ declaraciones\ personales\ y\ 45\ a\ pymes.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 17.100\ euros.}$

**********

OPCIÓN B

1º) En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2 % para la marca A, 3 % para la marca B y 15 % para la marca C. Se elige un yogur al azar:

$a$) Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.

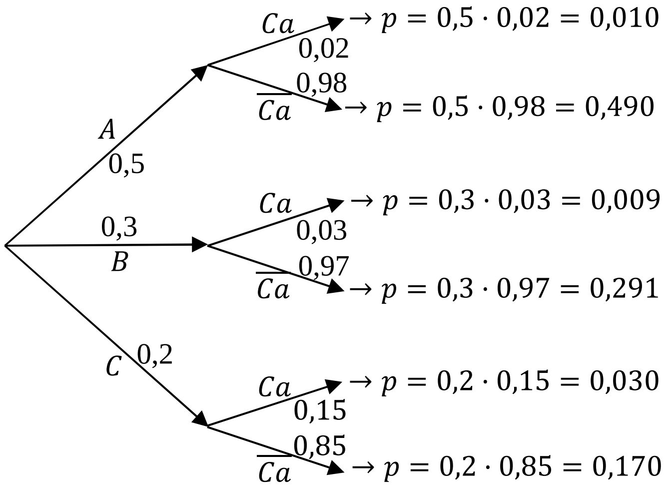
$b$) Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.

$c$) Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

----------

$a$)

$$250+150+100=500 \Rightarrow A=\frac{250}{500}=0{,}5;\ \ B=\frac{150}{500}=0{,}3;\ \ C=\frac{100}{500}=0{,}2.$$




$b$)

$$P=P(Ca)=P(A\cap Ca)+P(B\cap Ca)+P(C\cap Ca)=$$

$$=P(A)\cdot P(Ca/A)+P(B)\cdot P(Ca/B)+P(C)\cdot P(Ca/C)=$$

$$=0{,}5\cdot 0{,}02+0{,}3\cdot 0{,}03+0{,}2\cdot 0{,}15=0{,}010+0{,}009+0{,}030=\underline{0{,}049}.$$

$c$)

$$P=P(A/Ca)=\frac{P(A\cap Ca)}{P(Ca)}=\frac{P(A)\cdot P(Ca/A)}{P(Ca)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}02}{0{,}049}=\frac{0{,}010}{0{,}049}=\underline{0{,}2041}.$$

**********

2º) Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre las ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

$a$) Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90 % la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.

$b$) Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$
$1-0{,}05=0{,}9500 \ \rightarrow z=1{,}645).$

$Datos: p=\frac{81}{225}=0{,}36; \ \ q=1-0{,}36=0{,}64; \ \ n=225; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q \ y \ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}; \ p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}36-1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}36\cdot 0{,}64}{225}}; \ 0{,}36+1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}36\cdot 0{,}64}{225}}\right);$$

$(0{,}36-1{,}645\cdot 0{,}032; \ 0{,}36+1{,}645\cdot 0{,}032); \ \ (0{,}36-0{,}0526; \ 0{,}36+0{,}0526).$

$$\underline{I.C._{90\,\%}=(0{,}3074; \ 0{,}4126).}$$

$b$)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $\sigma=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}36\cdot 0{,}64}{225}}=0{,}032; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96; \ \ E=0{,}03.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} \Rightarrow n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2\cdot p\cdot q=\left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2\cdot 0{,}36\cdot 0{,}64=$

$=4.268{,}44\cdot 0{,}2304=983{,}45.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 984\ personas.}$$

**********

3º) En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{-3x + 30}{4}, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$$

donde $x$ representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

$a)$ ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?

$b)$ ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?

$c)$ ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15.000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

----------

$a)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} A(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2) = 4 + 2 = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} A(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-3x+30}{4} = \frac{24}{4} = 6 = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} A(x) = \lim_{x \to 2^+} A(x) = f(2).$$

$$\underline{La\ función\ A(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

En el intervalo $[0, 2)$ la función es la parábola $y = x^2 + 2$, que es convexa $(\cup)$ y cuyo vértice es el punto $V(0, 2)$.

En el intervalo $[2, 10]$ la función es la recta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$ que es decreciente por ser negativa el valor de su pendiente.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: x \epsilon (0, 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: x \epsilon (2, 10)}.$$

$b)$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que:

$\underline{La\ máxima\ audiencia\ se\ produjo\ cuando\ x = 2}.$

$A(2) = \frac{-3 \cdot 2 + 30}{4} = \frac{-6 + 30}{4} = \frac{24}{4} = 6.$

$\underline{La\ máxima\ audiencia\ fue\ de\ 60.000\ espectadores}.$

$c)$

$A(0) = 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2.$

$\underline{La\ audiencia\ al\ comienzo\ de\ la\ serie\ fue\ de\ 20.000\ espectadores}$

$A(x) = 1,5 \Rightarrow \frac{-3x + 30}{4} = 1,5;\ \ -3x + 30 = 6;\ \ 3x = 24;\ \ x = 8.$

$\underline{Debe\ dejar\ de\ emitirse\ a\ los\ 8\ años\ del\ comienzo\ de\ la\ serie}.$

**********

4º) Un kiosco vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1 euros, las revistas a 5 euros y los libros a 12 euros. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1.500 euros. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

$a$) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

$b$) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosco la semana pasada?

----------

$a$)

Sean $x, y, z$ los periódicos, revistas y libros que vende semanalmente el kiosco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+5y+12z=1.500 \\ 3x=10y \\ 12y=\frac{x+5y}{4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+5y+12z=1.500 \\ 3x-10y=0 \\ x+5y-48z=0 \end{array}\right\}.$$

$b$)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1.500 & 5 & 12 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & -48 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 3 & -10 & 0 \\ 1 & 5 & -48 \end{vmatrix}}=\frac{1.500\cdot\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 5 & -48 \end{vmatrix}}{480+180+120+720}=\frac{1.500\cdot 480}{1.500}=480.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1.500 & 12 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -48 \end{vmatrix}}{1.500}=\frac{-1.500\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -48 \end{vmatrix}}{1.500}=144.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1.500 \\ 3 & -10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{1.500}=\frac{1.500\cdot\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{1.500}=15+10=25.$$

$\underline{El\ kiosco\ vendió\ la\ semana\ pasada\ 480\ periódicos, 144\ revistas\ y\ 25\ libros.}$

**********