PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2016

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio, realizado hace un año, concluyó que, al menos, el 32 % de los habitantes de una comunidad tenían obesidad o sobrepeso. Poco después, se puso en marcha una campaña de fomento de hábitos de vida saludable que ha culminado recientemente con una encuesta realizada a 450 habitantes de esa comunidad, de los que 324 no tenían ni obesidad ni sobrepeso.

a) Con un nivel de significación del 1 %, ¿se puede rechazar que la campaña ha sido un éxito y que, por tanto, el porcentaje de habitantes con obesidad o sobrepeso no ha disminuido?

b) ¿Qué ocurre si el nivel de significación es del 10 %?

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0: p \geq 0{,}32 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: p < 0{,}32 \end{array}\right\}.$$

Contraste *unilateral;* en el caso que nos ocupa es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ +\infty\right)$.

$1-\alpha = 0{,}99\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{2{,}33}$.
$(1 - 0{,}01 = 0{,}9900\ \rightarrow z = 2{,}33)$.

Para $p_0 = 0{,}32, q_0 = 0{,}68\ y\ n = 450$:

$$\left(0'32 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0{,}68}{450}};\ +\infty\right);\ (0'32 - 2{,}33 \cdot 0{,}022;\ +\infty);$$

$(0'32 - 0{,}051;\ +\infty)\ \Rightarrow\ \underline{(0'269;\ +\infty)}$.

La proporción muestral es $p = 1 - q = 1 - \frac{324}{450} = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$, que pertenece a la zona de contraste, por lo cual se debe admitir la hipótesis nula, o sea que:

$\underline{Con\ significación\ del\ 1\ \%\ se\ admite\ que\ la\ campaña\ no\ ha\ sido\ un\ éxito.}$

$b)$

Para un nivel de significación es del 10 % es:

$\alpha = 0{,}10\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{1,28}. \qquad (1 - 0{,}10 = 0{,}9000\ \rightarrow z = 1{,}28).$

$$\left(0'32 - 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0{,}68}{450}};\ +\infty\right);\ (0'32 - 1{,}28 \cdot 0{,}022;\ +\infty);$$

$(0'32 - 0{,}028;\ +\infty)\ \Rightarrow\ \underline{(0'2918;\ +\infty)}.$

La proporción muestral $p = 0{,}28$ no pertenece a la zona de contraste, por lo cual no se debe admitir la hipótesis nula, o sea que:

$\underline{Con\ significación\ del\ 10\ \%\ se\ rechaza\ la\ hipótesis\ inicial:\ ha\ sido\ un\ éxito.}$

****

2º) Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30 % son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.

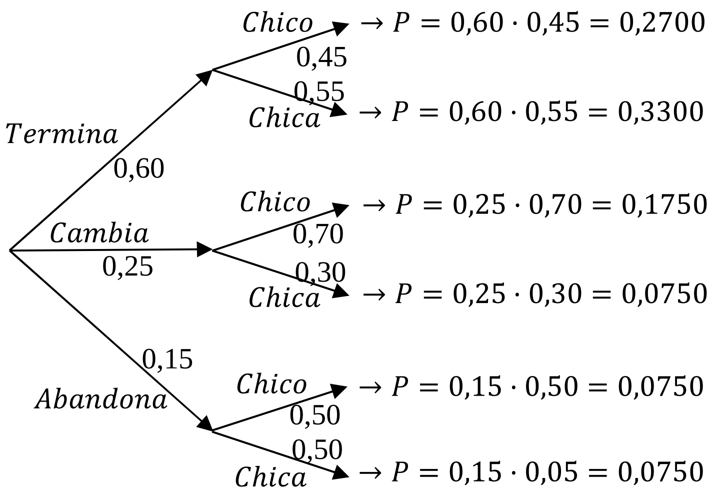
a) Construir un diagrama del árbol.

b) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?

c) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?

----

a)



b)

$$P = (T/Chico) + (C/Chico) + (A/Chico) =$$

$$= 0{,}60 \cdot 0{,}45 + 0{,}25 \cdot 0{,}70 + 0{,}15 \cdot 0{,}50 = 0{,}2700 + 0{,}1750 + 0{,}0750 = 0{,}5200.$$

$$\underline{P = 0{,}5200}.$$

c)

$$P = P(C/Chico) = \frac{P(C) \cap P(Chico)}{P(Chico)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}70}{0{,}2700 + 0{,}1750 + 0{,}0750} = \frac{0{,}1750}{0{,}5200} = 0{,}3365.$$

$$\underline{P = 0{,}3365}.$$

****

3º) La función $G(x)=\begin{cases}\frac{2x}{3}, si\ 0\leq x\leq 8\\ \frac{5x+8}{2x-7}\ \ , si\ x>8\end{cases}$, en miles de euros, de las ganancias de una empresa, creada para dar servicio y potenciar el sector de las Energías Renovables en función del tiempo transcurrido x, en meses desde su creación.

a) ¿Cuánto gana la empresa transcurridos 6 meses desde su creación? ¿Y transcurridos 10 años?

b) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias.

c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo? Razona la respuesta.

----

a)

$$G(6)=\frac{2\cdot 6}{3}=2\cdot 2=4.$$

Diez años son 120 meses

$$G(120)=\frac{5\cdot 120+8}{2\cdot 120-7}=\frac{600+8}{240-7}=\frac{608}{233}\cong 2{,}60944.$$

$$\underline{Transcurridos\ 6\ meses\ gana\ 4.000\ euros.}$$

$$\underline{Transcurridos\ 10\ años\ gana\ 2.609{,}4\ euros.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$G'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\ \ si\ 0\leq x\leq 8\\ \frac{-51}{(2x-7)^2}\ \ (*), si\ x>8\end{cases}.$$

(*) $\quad g(x)=\frac{5x+8}{2x-7}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{5\cdot(2x-7)-(5x+8)\cdot 2}{(2x-7)^2}=\frac{10x-35-10x-16}{(2x-7)^2}=\frac{-51}{(2x-7)^2}.$

$$Crecimiento: G'(x)>0\Rightarrow x\epsilon[0,8].$$

$$Decrecimiento: G'(x)<0\Rightarrow x\epsilon(8,+\infty).$$

$$\underline{La\ ganancia\ crece\ los\ 8\ primeros\ meses; despúes\ decrece.}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{2x-7}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

$\underline{Con\ el\ tiempo\ la\ ganancia\ se\ estabiliza\ en\ 2.500\ euros\ mensuales}.$

****

4º) Una casa rural adquirió un total de 200 toallas de tres tipos: de baño, de manos y de pies, gastando para ello un total de 7.600 euros. El precio de una toalla de baño es de 50 euros, el de una toalla para manos es de 40 euros y el de una toalla para pies es de 25 euros. Además, por cada tres toallas para manos se compran dos toallas para pies. ¿Cuántas toallas de cada tipo ha comprado la casa rural?

Sean x, y, z el número de toallas de baño, de manos y de pies que se adquieren, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ 50x+40y+25z=7.600 \\ 2y=3z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ 10x+8y+5z=1.520 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 1.520 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-4.800+3.040-2.000+4.560}{-24+20-10+30}=\frac{7.600-6.800}{50-24}=\frac{800}{16}=50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 10 & 1.520 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{16}=\frac{-4.560+6.000}{16}=\frac{1.440}{16}=90.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 10 & 8 & 1.520 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{16}=\frac{4.000-3.040}{16}=\frac{960}{16}=60.$$

$$\underline{La\ casa\ rural\ adquirió\ 50, 90\ y\ 60\ toallas\ de\ baño, manos\ y\ pies, respect.}$$

****

PRUEBA B

1º) En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 57,2 % de los catalanes están *totalmente o bastante* a favor de la independencia".

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 1.050 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 0,8.

b) ¿A cuántas personas habría que encuestar para estimar la proporción de respuestas del titular con un error máximo del 1,5 % y con un nivel de confianza del 95 %?

----

a)

Para un nivel de confianza de $0{,}8 = 80\ \%$:

$1-\alpha=0{,}80\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}80=0{,}20\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}1}=\mathbf{1{,}28}.$
$(1-0{,}1=0{,}9000\ \rightarrow z=1{,}28).$

Conocemos: $n=1.050;\ \ p=0{,}572;\ \ q=1-0{,}496=0{,}428.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}572-1{,}28\cdot\sqrt{\frac{0{,}572\cdot 0{,}428}{1.050}},0'572+1{,}28\cdot\sqrt{\frac{0{,}572\cdot 0{,}428}{1.050}}\right);$$

$(0{,}572-1{,}28\cdot 0'0153{,}0'572+1{,}28\cdot 0'0153);$

$(0{,}572-0'0195,0'572+0'0195).$

$$\underline{I.C._{80\ \%}=(0'5525,0'5915).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 %:

$\alpha=1-0{,}95=0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=\mathbf{1{,}96}.$
$(1-0{,}025=0{,}9750\ \rightarrow z=1{,}96).$

Conocemos: $E=0{,}015;\ \ p=0{,}572;\ \ q=0{,}428;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

De la fórmula del error máximo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P\cdot q}{n}}\ \Rightarrow\ E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{P\cdot q}{n}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{P \cdot q}{E^2} = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}572 \cdot 0{,}428}{0{,}015^2} = 3{,}8416 \cdot \frac{0{,}2448}{0{,}000225} = 3{,}8416 \cdot 1.088'07 =$$

$$= 4.179{,}93.$$

$\underline{Habría\ que\ encuestar\ por\ lo\ menos\ a\ 4.180\ catalanes.}$

****

2º) Para contrastar la noticia de que, al menos, el consumo medio mensual de energía eléctrica de los hogares canarios es de 295 Kwh, con una desviación típica de 32 Kwh, se toma una muestra de 400 hogares del archipiélago para los que se obtiene una media de 292 KWh. Si la variable *consumo mensual de energía eléctrica de los hogares canarios* es normal:

a) Plantear el contraste adecuado. Indicar cuál es la región crítica.

b) Con un nivel de significación del 10 %, ¿se puede aceptar lo que se afirma en la noticia?

c) ¿Qué se puede decir si el nivel de significación es del 0,5 %?

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0: \mu \geq 295 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 295 \end{array}\right\}. \quad \text{Contraste unilateral.}$$

Conocemos: $n = 400;\ \ \mu_0 = 295;\ \sigma = 32.$

La región de aceptación es $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$$\overline{x} > \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \ \overline{x} > 295 - z_\alpha \cdot \frac{32}{\sqrt{400}} = 295 - z_\alpha \cdot 1'6.$$

$$\underline{Región\ crítica: \overline{x} > 295 - z_\alpha \cdot 1'6}\ .$$

b)

$\alpha = 0{,}10\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{1,28}.$ $\qquad$ (1 – 0,10 = 0,9000 $\rightarrow z =$ 1,28).

Región crítica: $295 - z_\alpha \cdot 1'6 = 295 - 1'28 \cdot 1'6 = 295 - 2'048 =$

$= 292'952 > 292.$

$$\underline{\overline{x} = 292 \notin (292'952, +\infty) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ nivel\ de\ confianza\ del\ 10\ \%\ el\ consumo\ mensual\ es\ menor\ de\ 295\ KWh.}$$

c)

$Para\ \alpha = 0{,}005\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{2,575}.$ $\quad$ (1 – 0,005 = 0,9950 $\rightarrow z =$ 2,575).

Región crítica: $295 - z_\alpha \cdot 1'6 = 295 - 2'575 \cdot 1'6 = 295 - 4'12 =$

$= 290'88 < 292.$

$\underline{\overline{x} = 292 \in (290'88, +\infty) \Rightarrow Ahora\ si\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 0{,}5\ \%\ el\ consumo\ mensual\ es\ superior\ a\ 295\ KWh.}$

****

3º) La función del nivel de rendimiento físico de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es $R(t) = t^3 - 7{,}5t^2 + 12t + 13$ unidades, siendo t el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza y con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?

b) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?

c) Cuando llega a su mínimo rendimiento, ¿en qué nivel de rendimiento está?

----

a)

$R(0) = 13.$

$R(5) = 5^3 - 7{,}5 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 13 = 125 - 187{,}5 + 60 + 13 =$

$= 198 - 187{,}5 = 10{,}5.$

$\underline{El\ rendimiento\ al\ comenzar\ es\ 13\ unidades\ y\ al\ terminar, 10'5\ unidades.}$

b)

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo que se anule su primera derivada:

$R'(t) = 3t^2 - 15t + 12.$

$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 15t + 12 = 0;\ \ t^2 - 5t + 4 = 0;\ \ t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$

$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow\ t_1 = 2;\ t_2 = 4.$

La condición anterior, que es necesaria, no es suficiente; para que una función tenga un máximo tiene que ser negativa la segunda derivada para los valores que anulen la primera derivada:

$$R''(t) = 6t - 15 \Rightarrow \begin{cases} R''(2) = 6 \cdot 2 - 15 = -3 < 0 \rightarrow Máximo\ para\ x = 2 \\ R''(4) = 6 \cdot 4 - 15 = 9 > 0 \rightarrow Mínimo\ para\ x = 4 \end{cases}.$$

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ lo\ alcanza\ en\ la\ segunda\ hora\ de\ la\ carrera.}$

c)

Del apartado anterior:

$\underline{El\ mínimo\ rendimiento\ lo\ alcanza\ en\ la\ cuarta\ hora\ de\ la\ carrera.}$

$$R(4) = 4^3 - 7{,}5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 13 = 64 - 120 + 48 + 13 =$$

$$= 125 - 120 = 5.$$

$\underline{En\ el\ rendimiento\ mínimo\ está\ en\ 5\ unidades}.$

****

4º) Una empresa de transporte quiere organizar un viaje para 320 personas. Dispone de 4 autocares de 60 plazas y 5 autocares de 40 plazas. Si el costo de cada autocar de 60 plazas es igual a 320 euros y el costo de cada autocar de 40 plazas es de 230 euros:

a) Plantear el problema que determina el número de autocares de cada tipo que se han de elegir para minimizar los costos globales.

b) Representar la región factible, determinar la solución óptima y hallar el costo global mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de autobuses utilizados de 60 y 40 plazas, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 60x+40y \geq 320 \\ x \leq 4;\ \ y \leq 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x+2y \geq 16 \\ x \leq 4;\ \ y \leq 5 \end{array}\right\}$.

La función de rendimiento es $f(x,y)=320x+230y$.

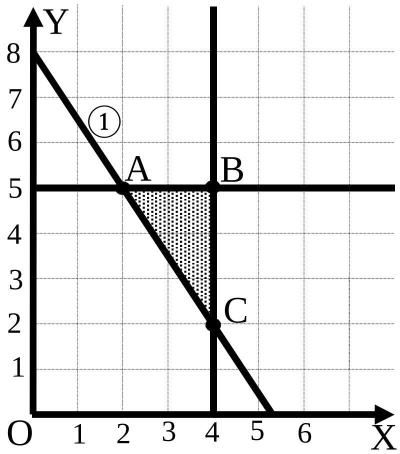
b)

$① \Rightarrow 3x+2y \geq 16 \Rightarrow y \leq \frac{16-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	2
y	8	5

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=16 \\ y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow B(4,5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=16 \\ x=4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(4,2).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,5)=320 \cdot 2+230 \cdot 5=640+1.150=1.790.$

$B \Rightarrow f(4,5)=320 \cdot 4+230 \cdot 5=1.280+1.150=2.430.$

$C \Rightarrow f(4,2)=320 \cdot 4+230 \cdot 2=1.280+460=1.740.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ con\ 4\ de\ 60\ plazas\ y\ 2\ de\ 40\ y\ es\ de\ 1.740\ euros.}$

****