PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS　　　　Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio sobre los kilogramos de residuos no minerales que genera cada español al año, ha dado, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza siguiente: $[1.470{,}6; 1.529{,}4]$. Si la desviación típica es de 150 kilogramos, suponiendo que la generación de residuos sigue una distribución normal:

$a)$ ¿Cuál es la media muestral?

$b)$ ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

$c)$ ¿Cuál sería el correspondiente intervalo con la misma información muestral pero con un nivel del confianza igual a 0,9?

$a)$

La media muestral es la media aritmética del intervalo de confianza.

$$\overline{x} = \frac{1.470{,}6+1.529{,}4}{2} = \frac{3.000}{2} = \underline{1.500}.$$

$b)$

Datos: $\overline{x} = 1.000$; $n = 100$; $\sigma = 150$.

$$E = \frac{1.529{,}4-1.470{,}6}{2} = \frac{58{,}8}{2} = 29{,}4.$$

De la fórmula del error máximo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{29'4\cdot\sqrt{100}}{150} = \frac{294}{150} = 1{,}96.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$: A 1,96 le corresponde en la tabla 0’9750.

$$1-\frac{\alpha}{2}=0'9750;\;\; 2-\alpha=1'9500;\;\; \alpha=2-1'9500=0'0500.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ 0{,}05.}$$

$c)$

Para un nivel de confianza de 0,9 = 90 %:

$1-\alpha=0{,}90\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}90=0{,}10\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=\mathbf{1{,}645}.$
$(1-0{,}05=0{,}9500\ \rightarrow z=1{,}645).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.500-1{,}645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}};\ 1.500+1{,}645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(1.500-1{,}645\cdot 15;\ 1.500+1{,}645\cdot 15);$$

$$(1.500-24'675;\ 1.500+24'675);$$

$$\underline{I.C._{90\ \%}=(1.475'325, 1.524'675).}$$

****

2º) El dueño de un pequeño supermercado ha observado, durante un largo periodo de tiempo, que sus beneficios semanales se distribuyen según una ley normal con una media de 5.300 euros y una desviación típica de 500 euros. A finales del año 2.014 se abrió una frutería justo enfrente y él cree que, desde entonces, su beneficio semanal medio ha disminuido. Para contrastar esta suposición, ha tomado una muestra aleatoria de 20 semanas del año 2.015 y ha encontrado que el beneficio semanal medio de esa muestra es de 5.000 euros:

a) Plantear un test de hipótesis que permita contrastar la suposición del comerciante.

b) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 2 %?

c) ¿Cuál es la conclusión con un nivel de significación igual a 0,003?

----

a)

$$\underline{\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0: \mu \geq 5.300 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 5.300 \end{array}\right\}}.$$ Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 20;\ \ \mu_0 = 5.300;\ \sigma = 500.$

La región de aceptación es $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$:

$\alpha = 0{,}02\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{2{,}055}.$ $\quad$ $(1 - 0{,}02 = 0{,}9800\ \rightarrow z = 2{,}055).$

Región de aceptación: $\left(5.300 - 2{,}055 \cdot \frac{500}{\sqrt{20}};\ +\infty\right)$;

$(5.300 - 2{,}055 \cdot 111{,}80;\ +\infty);\ (5.300 - 29'756;\ +\infty) \Rightarrow (5.270'244;\ +\infty).$

$$\underline{\overline{x} = 5.000 \notin (5.270'244) \Rightarrow No\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ significación\ del\ 2\ \%\ el\ beneficio\ semanal\ ha\ disminuído.}$$

c)

$Para\ \alpha = 0{,}003\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{2{,}75}.$ $\quad$ $(1 - 0{,}003 = 0{,}9970\ \rightarrow z = 2{,}75).$

La región de aceptación es $\left(5.300 - 2{,}75 \cdot \frac{500}{\sqrt{20}};\ +\infty\right)$;

$(5.300 - 2{,}75 \cdot 111{,}80;\ +\infty);\ (5.300 - 29'756;\ +\infty) \Rightarrow (5.329'756).$

$$\underline{\overline{x} = 5.000 \in (-\infty, 5.529'576) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$$

****

3º) En 8 años, el capital invertido por una compañía de fondos de inversión, en millones de euros, viene dado por la función $c(t) = t^2 - 7t + 14$, siendo $t \in [0, 8]$ el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $c(t)$? ¿En qué momento ha sido máximo el capital invertido? ¿Cuál es el capital máximo invertido?

b) ¿Cuándo $c(t)$ alcanza un mínimo? ¿Cuál es el capital mínimo invertido?

c) ¿Cuándo el capital invertido fue igual a 4 millones?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(t) = 2t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

$$Para\ t < 3{,}5 \Rightarrow\ c'(t) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Derecimiento: (0, 3'5)}.$$

$$Para\ t > 3{,}5 \Rightarrow\ c'(t) > 0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (3'5, 8)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$c''(t) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t = 3{,}5.$$

Por ser $c(t)$ una parábola convexa ($\cup$), lo que tiene es un mínimo (como se acaba de deducir), por lo cual el máximo capital invertido tiene que ser al principio o al final del proceso.

$$c(0) = 14. \qquad c(8) = 8^2 - 7 \cdot 8 + 14 = 64 - 56 + 14 = 22.$$

$$\underline{El\ capital\ invertido\ ha\ sido\ máximo\ al\ terminar\ el\ octavo\ año.}$$

$$\underline{El\ máximo\ capital\ invertido\ ha\ sido\ de\ 22\ millones\ de\ euros.}$$

b)

$$\underline{El\ mínimo\ se\ alcanza\ a\ los\ 3{,}5\ años\ del\ comienzo\ de\ la\ inversión.}$$

$$c(3{,}5) = 3{,}5^2 - 7 \cdot 3{,}5 + 14 = 12{,}25 - 24{,}5 + 14 = 1{,}75.$$

$$\underline{El\ capital\ mínimo\ invertido\ fue\ de\ 1{,}75\ millones\ de\ euros}.$$

$c)$

$$c(t)=4 \Rightarrow t^2-7t+14=4;\ \ t^2-7t+10=0;\ t=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=$$

$$=\frac{7\pm3}{2} \Rightarrow t_1=2, t_2=5.$$

$$\underline{El\ capital\ invertido\ fue\ de\ 4\ millones\ a\ los\ 2\ años\ y\ a\ los\ 5\ años}.$$

****

4º) Un instituto oferta a sus 240 alumnos actividades extraescolares. Algunos hacen deportes, otros hacen teatro y los hay que deciden no hacer actividades. Los que hacen deportes son el doble de los que hacen teatro y los que no hacen ninguna actividad juntos. Los que hacen teatro son la tercera parte de los que no hacen ninguna actividad. ¿Cuántos alumnos hay en cada modalidad?

Sean x, y, z los alumnos que hacen deporte, teatro o no hacen ninguna actividad, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ x=2(y+z) \\ y=\frac{z}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ x=2y+2z \\ 3y=z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ x-2y-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 240 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{240\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{2+3+6+1}=\frac{240\cdot(2+6)}{12}=20\cdot 8=160.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 240 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12}=\frac{-240\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{12}=\frac{-240\cdot(-1)}{12}=-20\cdot(-1)=20.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 240 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{12}=\frac{240\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{12}=\frac{240\cdot(3)}{12}=20\cdot 3=60.$$

$$\underline{Hacen\ deporte\ 160, teatro, 20\ y\ no\ hacen\ ninguna\ actividad, 60}$$

****

PRUEBA B

1º) En un invernadero que se dedica a la producción de tomates, se ha comprobado que el peso de los tomates sigue una distribución normal con media 100 g y desviación típica 10 g. A la hora de comercializarlos se toman para la clase A los comprendidos entre 80 y 120 g. Hallar la probabilidad de que:

a) Elegido un tomate al azar, corresponda a la clase A.

b) Elegidos una docena de tomates al azar, su peso medio sea superior a 105 g.

----

a)

$X = N(\mu, \sigma) = N(100, 10).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-100}{10}$.

$P\left(\frac{80-100}{10} \leq \frac{\overline{X}-100}{10} \leq \frac{120-100}{10}\right) = P\left(\frac{-20}{10} \leq Z \leq \frac{20}{10}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) =$

$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 2)] =$

$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 2) = 2 \cdot P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 =$

$= 1{,}9544 - 1 = \underline{0{,}9544 = 95{,}44\ \%}$.

b)

$Variable\ X \rightarrow N(100, 10)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow Para\ n = 12 \rightarrow \overline{X} = N\left(100, \frac{10}{\sqrt{12}}\right) = N(100, 2'887).$

$P(\overline{X} > 105) = P\left(Z > \frac{105-100}{2{,}887}\right) = P\left(Z > \frac{5}{2{,}887}\right) = P(Z > 1{,}73) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = \underline{0{,}0418 = 4{,}18\ \%}$.

****

2º) Un estudio realizado sobre 225 adultos indica que 135 duermen menos de 8 horas cada día.

a) Con una confianza del 98 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de adultos que duermen, al menos, 8 horas cada día.

b) Con una significación del 0,5 %, si se obtuviese el mismo porcentaje muestral para una muestra de 350 adultos, ¿se puede rechazar la hipótesis de que como mínimo el 65 % de los adultos duermen menos de 8 horas cada día?

----

a)

$$p = \frac{225-135}{225} = \frac{90}{225} = 0{,}4; \;\; q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6; \;\; n = 225.$$

El intervalo de confianza es: $I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0{,}98 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}33.$
$1 - 0{,}01 = 0{,}99 \;\rightarrow z = 2{,}33).$

$$I.C. = \left(0'4 - 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{225}};\ 0'4 + 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{225}}\right);$$

$(0'4 - 2'33 \cdot 0'0327;\ 0'4 + 2'33 \cdot 0'0327);.$

$(0'4 - 0'0761;\ 0'4 + 0'0761).$

$$\underline{I.C._{98\%} = (0'3239;\ 0'4761).}$$

b)

$p_0 = 0{,}65; \;\; q_0 = 1 - 0{,}65 = 0{,}35; \;\; n = 350.$ $\qquad p = \frac{135}{225} = 0{,}6.$

Para una significación del 0,5 %:

$Para\ \alpha = 0{,}005 \;\rightarrow\; z_\alpha = 2{,}575.$ $\quad (1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \;\rightarrow z_\alpha = 2{,}575).$

$$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0\!: p_0 \geq 0{,}65 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1\!: p < 0{,}65 \end{array}\right\}.$$ Contraste unilateral.

La zona de aceptación es: $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ +\infty\right)$.

$$\left(0{,}65 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{350}};\ +\infty\right);\ (0{,}65 - 2{,}575 \cdot 0{,}0255);$$

$$(0{,}65 - 0{,}0656;\ +\infty);\ \ (0{,}5844;\ +\infty).$$

$$p = 0{,}6 \in (0{,}5844;\ +\infty) \Rightarrow No\ se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.$$

$$\underline{Al\ menos\ el\ 65\ \%\ duerme\ menos\ de\ 8\ horas}.$$

****

3º) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una gran ciudad en los últimos años, indica que su concentración (en mg/m^3) viene dada por la función: $f(t) = -0{,}2t^2 + 5t + 10$, donde t indica el número de años que han transcurrido desde el 1 de enero de 2.010 a las 0:00 horas. Según ese estudio:

a) ¿Cuál fue la concentración el 1 de enero de 2.016 a las 0:00 horas?

b) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación? ¿En qué estación del año tendrá lugar? ¿Cuál será el valor de dicha concentración?

----

a)

$$t = 2.016 - 2.010 = 6\ años.$$

$$f(6) = -0{,}2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 10 = -0{,}2 \cdot 36 + 30 + 10 = -7{,}2 + 40 = 32{,}8.$$

$$\underline{La\ concentración\ el\ 1\ de\ enero\ de\ 2.016\ a\ las\ 0{:}00\ horas\ fue\ de\ 32{,}8\ mg/m^3.}$$

b)

La función $f(t) = -0{,}2t^2 + 5t + 10$ es una parábola cóncava ($\cap$) por lo cual el valor máximo se encuentra en el valor que anula su primera derivada:

$$f'(t) = -0{,}4t + 5 = 0;\ 0{,}4t = 5;\ \ t = \frac{5}{0{,}4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5.$$

$$\underline{El\ máximo\ nivel\ de\ contaminación\ se\ alcanzará\ dentro\ de\ 12\ años\ y\ medio.}$$

Entendiendo que la máxima contaminación se produce al final de junio:

$$\underline{La\ máxima\ contaminación\ se\ producirá\ en\ verano.}$$

$$f(12{,}5) = -0{,}2 \cdot 12{,}5^2 + 5 \cdot 12{,}5 + 10 = -0{,}2 \cdot 156{,}25 + 62{,}5 + 10 =$$

$$= -31{,}25 + 72{,}5 = 41{,}25.$$

$$\underline{La\ concentración\ máxima\ será\ de\ 41{,}25\ mg/m^3.}$$

****

4º) Para sufragarse los gastos del viaje de estudios, los alumnos de un instituto han montado un mercadillo para vender objetos de segunda mano distribuidos en dos tipos de packs. Cada pack tipo A consta de 3 libros y una pieza de ropa, y cada pack tipo B consta de 2 libros y 2 piezas de ropa. Cada pack tipo A se vende a 7 euros y cada pack tipo B se vende a 8,5 euros. Por problemas de almacenamiento, se pueden disponer, a lo sumo, de 342 libros y 218 piezas de ropa. Desean maximizar su recaudación.

a) Determinar la función objetivo y expresar mediante inecuaciones las restricciones del problema.

b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de pack deben vender los alumnos para que la recaudación obtenida sea máxima? Calcula dicha recaudación.

----

a)

Sean x e y el número de packs de los tipos A y B que venden, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+2y \leq 342 \\ x+2y \leq 218 \\ x \geq 0; \;\; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es: $\underline{f(x,y) = 7x + 8{,}5y}$.

La región factible se indica en la figura:

① $\Rightarrow 3x+2y \leq 342 \Rightarrow y \leq \frac{342-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	100
y	109	21

② $\Rightarrow x+2y \leq 218 \Rightarrow y \leq \frac{218-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	100	50
y	59	84

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

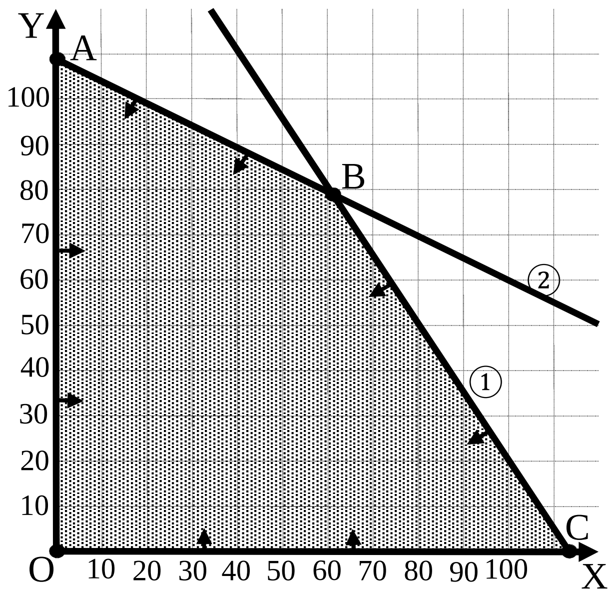
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x+2y = 218 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,109).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y = 342 \\ x+2y = 218 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y = 342 \\ -x-2y = -218 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 124 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 62; y = \frac{218-62}{2} = \frac{156}{2} = 78 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(62,78).$



$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 342 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(114, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 109) = 7 \cdot 0 + 8{,}5 \cdot 109 = 0 + 926{,}5 = 926{,}5.$$

$$B \Rightarrow f(62, 78) = 7 \cdot 62 + 8{,}5 \cdot 78 = 434 + 663 = 1.097.$$

$$C \Rightarrow f(114, 0) = 7 \cdot 114 + 8{,}5 \cdot 0 = 798 + 0 = 798.$$

El máximo se produce en el punto B.

$$\underline{La\ recaudación\ es\ máxima\ vendiendo\ 62\ packs\ tipo\ A\ y\ 78\ packs\ tipo\ B.}$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 1.097\ euros.}$$

****