PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sean $\overrightarrow{u}=(1,\ a,\ a)$, $\overrightarrow{v}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ a)$.

a) Halla los valores de α para los cuales los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales.

b) Determina los valores de α para los cuales el vector $\overrightarrow{w}$ está en el plano que contiene a O(0, 0, 0) y tiene por vectores directores a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

----

a)

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(1,\ a,\ a)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0+0+a=\underline{a=0}$.

$$\underline{\underline{\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}\ \ son\ \ ortogonales\ \ para\ \ a=0}}.$$

b)

El plano π que contiene a O(0, 0, 0) y tiene por vectores directores a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tiene por expresión general la siguiente: $\pi\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \underline{\pi\equiv ax-y=0}$.   (1)

Si el plano π tiene como vector director a $\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ a)$, su expresión general (que es única para cada plano) tiene que satisfacerse para este vector:

$$\pi(O;\ \overrightarrow{w},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x - y = 0}. \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce que $\underline{\alpha = 1}$.

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w}\ \textit{está contenido en}\ \pi\ \ \textit{para}\ \ a = 1}}.$$

****

2º) Sean g y h las funciones tales que $g(0)=1$, y $g'(x)=\cos x^2$, $h(x)=[g(x)]^2$, $-\infty<x<\infty$.

a) Hallar el valor de $h'(0)$.

b) Calcula $\int x\cdot\cos x^2\cdot dx$.

----

a)

$$h'(x)=2\cdot g(x)\cdot g'(x)=\underline{2\cdot\cos x^2\cdot g(x)}.$$

$$h'(0)=2\cdot\cos 0^2\cdot g(0)=2\cdot\cos 0\cdot 1=2\cdot 1\cdot 1=\underline{\underline{2}}.$$

b)

$$\int x\cdot\cos x^2\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=t \\ 2x\cdot dx=dt \\ dx=\frac{1}{2}x\cdot dx \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot sen\ t+C.$$

$$\underline{\underline{\int x\cdot\cos x^2\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot sen\ x^2+C}}$$

****

3º) Sea $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}=\frac{x^2-4x+4}{x-1}$.

a) Determina el dominio de f. b) Halla sus asíntotas.

c) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de f.

d) Dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados anteriormente.

----

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio de definición es R, excepto los valores de x que anulan el denominador.

$$x-1=0\ ;;\ \underline{x=1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1\}}}.$$

b)

Horizontales: son los valores finitos que toma f(x) cuando x tiende a valer ± infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-3}=\pm\infty \Rightarrow \underline{\underline{No\ tiene}}.$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $x-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$.

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como ocurre en nuestro caso.

Son de la forma y = mx + n; los los valores de m y n se obtienen como se indica a continuación:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4x+4}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x}=\underline{1=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+4}{x-1}=\underline{-3=n} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Asíntota\ oblicua:\ y=x-3}}.$$

c)

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x-4)\cdot(x-1)-\left(x^2-4x+4\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

El signo de f'(x) depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo para los valores de x pertenecientes al dominio de definición.

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=2}.$$

Las raíces del numerador dividen el dominio de definición R-{1} en los cuatro siguientes intervalos: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$.

$$Para\ \ x=-1 \Rightarrow f'(-1)=\frac{-1\cdot(-1-2)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \begin{cases} Creciente \to (-\infty,\ 0) \\ Decreciente \to (0,\ 1) \end{cases}.$$

$$Para\ \ x=3 \Rightarrow f'(3)=\frac{3\cdot(3-2)}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \begin{cases} Creciente \to (2,\ +\infty) \\ Decreciente \to (1,\ 2) \end{cases}$$

Resumiendo, los periodos de crecimiento y decrecimiento son:

$$\underline{\underline{f'(x)>0 \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0,\ 1)\cup(1,\ 2)}}$$

Los máximos y mínimos relativos son los valores que anulan la primera derivada, por tanto puede tener máximos y mínimos en los puntos de abscisas 0 y 2. Para que existan los máximos o mínimos es necesario que no se anule, para esos valores, la segunda derivada. Según que la segunda derivada sea negativa o positiva, el valor determina un máximo o un mínimo relativo, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2\cdot\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-3)^3}=\underline{\frac{2}{(x-1)^3}=f''(x)}.$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{(-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=0}.$$

$$f(0)=\frac{(-2)^2}{-1}=\frac{4}{-1}=-4 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo:\ A(0,\ -4)}}.$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1^3}=\frac{2}{1}=2>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=2}.$$

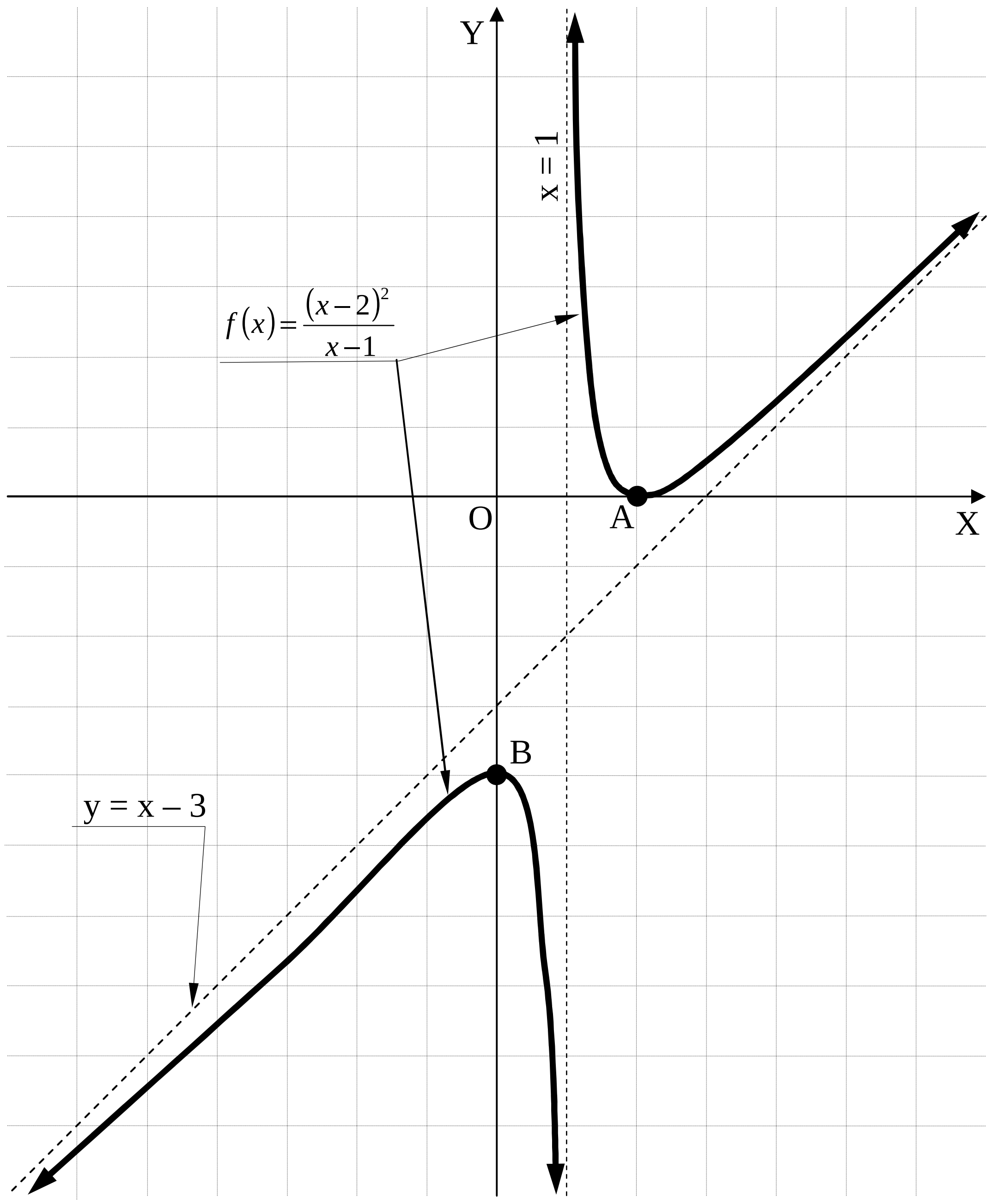
$$f(2)=\frac{0^2}{2-1}=\frac{0}{1}=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo:\; B(2,\;0)}}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada.

Por ser $f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}\neq 0,\;\forall x\in R \;\Rightarrow$ <u>No tiene puntos de inflexión</u>.

d)

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

4º) Consideremos el plano $\pi_\alpha \equiv x-y+az=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=1-t \\ z=1+3t \end{cases}, \ t \in R$.

a) Estudia, según los valores de α, la posición relativa del plano π_α y la recta r.

b) Cuando π_α y r se corten en un punto, halla las coordenadas de dicho punto.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=1-t \\ z=1+3t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+3=2y-2 \\ 3x-9=2z-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2z=7 \end{cases}}.$$

El plano π_α y la recta r forman el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 3x-2z=7 \\ x-y+az=0 \end{array}\right\}$.

Si la recta y el plano tienen un solo punto en común son secantes; el sistema tiene que ser compatible determinado. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango que tiene que ser igual que el número de incógnitas.

Como el sistema tiene tres incógnitas, el rango de las dos matrices tiene que ser 3, o sea, que el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \ ;; \ -4-2-6a \neq 0 \ ;; \ -6-6a \neq 0 \ ;; \ 1+a \neq 0 \Rightarrow \underline{a \neq -1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq -1\ \ la\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi_\alpha\ \ son\ \ secantes}}.$$

El sistema es incompatible cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son diferentes; como el rango de la matriz de coeficientes es 2 para α = -1, el rango de la matriz ampliada tiene que ser 3, o sea tiene que ser distinto de 0 su determinante.

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -15+14+7=6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El rango de la matriz ampliada es 3, independientemente del valor de α.

Para α = -1 las matrices de coeficientes y ampliada tienen rangos diferentes y, en consecuencia la recta y el plano no tienen puntos en común.

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1\ \ la\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi_{\alpha}\ \ son\ \ paralelos}}$$

b)

El punto de corte es la solución del sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 3x-2z=7 \\ x-y+az=0 \end{array}\right\}$ para α ≠ -1. Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}}{-6-6a}=\frac{-10-14a}{-6(a+1)}=\frac{14a+10}{6(a+1)}=\frac{2(7a+5)}{6(a+1)}=\underline{\frac{7a+5}{3(a+1)}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}{-6-6a}=\frac{7a-10-15a}{-6(a+1)}=\frac{-8a-10}{-6(a+1)}=\frac{8a+10}{6(a+1)}=\underline{\frac{4a+5}{3(a+1)}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6-a}=\frac{-15+14+7}{-6(a+1)}=\frac{6}{-6(a+1)}=\underline{\frac{-1}{a+1}}.$$

El punto de corte es $\underline{\underline{P\left(\frac{a+5}{3(a+1)},\ \frac{4a+5}{3(a+1)},\ \frac{-1}{a+1}\right)}}$.

****

PROPUESTA B

1º) Sean $\overrightarrow{u}=(1,\ a,\ a)$, $\overrightarrow{v}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ a)$.

a) Halla los valores de α para los cuales los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales.

b) Determina los valores de α para los cuales el vector $\overrightarrow{w}$ está en el plano que contiene a O(0, 0, 0) y tiene por vectores directores a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

2º) Sean g y h las funciones tales que $g(0)=1$, y $g'(x)=\cos x^2$, $h(x)=sen^2\, x$, $-\infty<x<\infty$.

a) Hallar el valor de $h'(0)$.

b) Calcula $\int x\cdot\cos x^2\cdot dx$.

(Resueltos en el apartado a)

3º) Sean A una constante positiva y p(x) un polinomio de tercer grado tal que su derivada es $p'(x)=Ax(x-1)$, $-\infty<x<\infty$.

a) Determina la abscisa de los extremos relativos y estudia la monotonía de p.

b) Enuncia el teorema de Rolle.

c) Justifica que existen b > 1 tal que $p(b)=p(0)$.

----

a)

Una función (polinomio) tiene extremos relativos para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$p'(x)=Ax(x-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$p''(x)=A[1\cdot(x-1)+x\cdot 1]=A(x-1+x)=\underline{A(2x-1)}.$$

$p''(0)=A(0-1)=-A<0\ \Rightarrow$ Máximo relativo para x = 0.

$p''(1)=A(2-1)=A>0\ \Rightarrow$ Mínimo relativo para x = 1.

Teniendo en cuenta que p(x) es continua en su dominio, que es r, los periodos de crecimiento y decrecimiento se deducen de sus extremos relativos:

$$\underline{\underline{Crecimiento: (-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}}.$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento: (0,\ 1)}}.$$

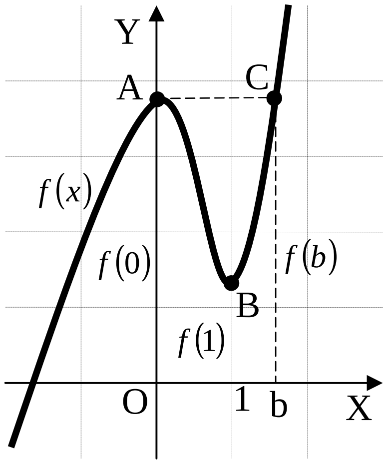
b)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

c)

La representación gráfica de la situación es de la forma que se indica en la figura adjunta.



El polinomio $p(x)$ es una función continua que tiene por dominio y por recorrido al conjunto de los números reales.

Teniendo en cuenta el dominio y la monotonía de la función y el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores reales k tales que $k > f(1)$ en el intervalo $(f(1),\ \infty)$, por lo cual tiene que existir necesariamente un valor b > 1 tal que $f(b) = f(0)$, como se nos pedía justificar.

****

4º) Discute el sistema $\begin{cases} ax+y=a \\ (a+1)x+y+z=a+3 \\ y+z=2 \end{cases}$ según el valor de α, y resuélvelo cuando tenga solución única.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a+3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a-a-(a+1)=-a-1=0 \ ;; \ a+1=0 \Rightarrow \underline{a=-1}.$$

$$\underline{Para \ \{a \neq -1\} \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M'=3=n^{o} \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ \det er \min ado}$$

$$Para \ \alpha=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \ M'=2}.$$

$$\underline{Para \ a=-1 \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M'=2<n^{o} \ incóg. \Rightarrow \ Compatible \ in\det er \min ado}.$$

Resolvemos para α ≠ 0: $\begin{cases} ax+y=a \\ (a+1)x+y+z=a+3 \\ y+z=2 \quad \rightarrow z=2-y \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ax+y=a \\ (a+1)x+y+2-y=a+3 \end{matrix}\right\} ;;$

$$\left.\begin{matrix} ax+y=a \\ (a+1)x=a+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=1} \ ;; \ y=a-ax=a-a \Rightarrow \underline{y=0} \ ;; \ z=2-y=2-0=\underline{2=z}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \ x=1, \quad y=0, \quad z=2}}.$$

****