PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

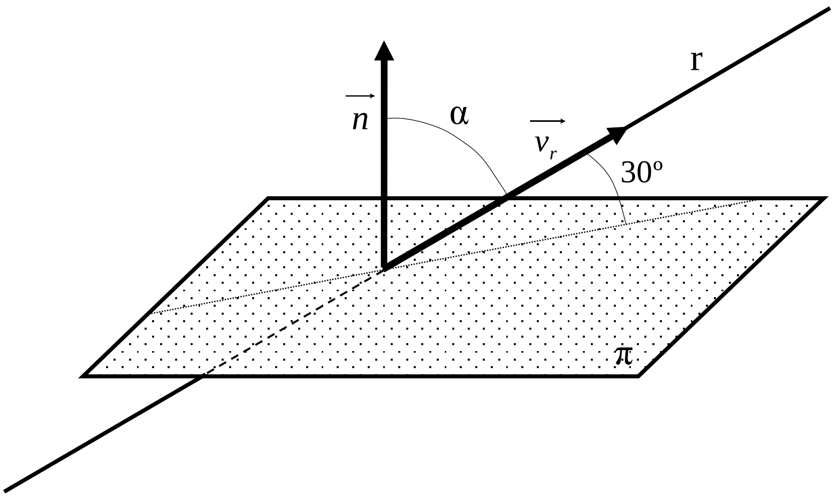
MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Calcula el valor de m para que la recta $r \equiv \frac{x}{2} = y = z$ y el plano $\pi \equiv x - y + mz = 4$ formen un ángulo de 30º.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo de 30º que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo α que forman el vector $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 1)$, director de r, y el vector $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ m)$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = sen\ 30º = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(2,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ m)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+m^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ ;;\ \frac{2-1+m}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+m^2}} = \frac{1+m}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2+m^2}} = \frac{1}{2}\ ;;\ 2(1+m) = \sqrt{6(2+m^2)}\ ;;\ 4(1+m)^2 = 6(2+m^2)\ ;;$$

$$2\cdot(1+2m+m^2) = 3\cdot(2+m^2)\ ;;\ 2+4m+2m^2 = 6+3m^2\ ;;\ m^2-4m+4=0\ ;;\ (m-2)^2 = 0 \Rightarrow \underline{m=2}\ .$$

<u>Las rectas r y s forman un ángulo de 30º para m = 2</u>.

****

2º) Encuentra los valores de α y b para los que A · A^t = I, siendo $A=\begin{pmatrix} \cos b & sen\ b & 0 \\ -sen\ b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

e I es la matriz identidad de orden 3 y A^t la matriz traspuesta de A.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos b & sen\ b & 0 \\ -sen\ b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -sen\ b & 0 \\ sen\ b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 b + sen^2 b & -sen\ b \cdot \cos b & 0 \\ -sen\ b \cdot \cos b & sen^2 b + \cos^2 b & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -sen\ b \cdot \cos b & 0 \\ -sen\ b \cdot \cos b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} sen\ b \cdot \cos b = 0 \\ a^2 = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \frac{1}{2} sen\ 2b = 0 \\ a^2 = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} sen\ 2b = 0 \\ a^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2b = 0^\circ + 2k\pi \\ a = \pm 1 \end{matrix}\right\}.$$

$$\underline{\underline{Soluciones: \left.\begin{matrix} a_1 = -1 \\ b = k\pi \end{matrix}\right\} \ y \ \left.\begin{matrix} a_2 = 1 \\ b = k\pi \end{matrix}\right\}, \ \forall k \in Z}}$$

****

3º) Calcula la primitiva de la función $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ de modo que $f(2)=\lim_{x\to 0}\frac{L(x^2+1)}{x}$.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\int\frac{1}{(1+x)(1-x)}dx=\int\left(\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}\right)dx=\int\frac{A-Ax+B+Bx}{1-x^2}dx=$$

$$=\int\frac{(-A+B)x+(A+B)}{1-x^2}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-A+B=0\\ A+B=1\end{array}\right\} \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow \underline{B=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{A=\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}\right)dx=-\frac{1}{2}L|1-x|+\frac{1}{2}L|1+x|+C=\underline{\frac{1}{2}L\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C}.$$

$$f(2)=\frac{1}{2}L\left|\frac{1+2}{1-2}\right|+C=\underline{\frac{1}{2}L3+C}. \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(x^2+1)}{x}=\frac{L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1}=\frac{0}{1}=\underline{0}.$$

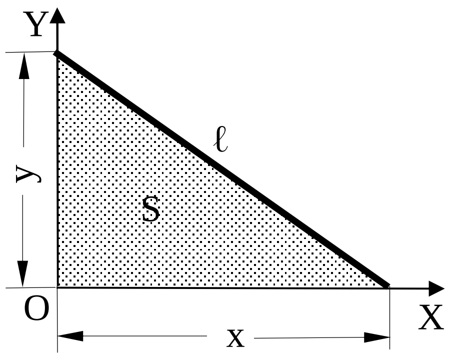
Igualando el valor del límite obtenido con la expresión (*):

$$\frac{1}{2}L3+C=0\ ;;\ \underline{C=-\frac{1}{2}L3}.$$

$$\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}L\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}L3=L\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}}}.$$

****

4º) Un segmento de longitud ℓ se apoya en los ejes coordenados del primer cuadrante determinando con ellos un triángulo rectángulo. Hallar el valor mínimo de la abscisa que se apoya para que el área del triángulo mencionado, de hipotenusa ℓ, sea máximo.



El área del triángulo es $S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y$.   (*)

Para expresar el área en función de una sola variable y aplicando el teorema de Pitágoras:

$\ell^2=x^2+y^2 \Rightarrow \underline{y=\sqrt{\ell^2-x^2}}$. Sustituyendo este valor en la expresión (*) resulta:

$$S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{\ell^2-x^2}=\underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\ell^2x^2-x^4}}.$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\ell^2x-4x^3}{2\cdot\sqrt{\ell^2x^2-x^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell^2x-2x^3}{x\sqrt{\ell^2-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell^2-2x^2}{\sqrt{\ell^2-x^2}}=0 \Rightarrow \ell^2-2x^2=0\ ;;\ \underline{\underline{x=\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}}.$$

El valor de y es: $y=\sqrt{\ell^2-x^2}=\sqrt{\ell^2-\frac{\ell^2}{2}}=\sqrt{\frac{\ell^2}{2}}=\underline{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}=y=x}$.

La igualdad de las coordenadas hacen que el triángulo rectángulo también sea isósceles.

Vamos a justificar que se trata de un máximo para el valor de x encontrado:

$$S''=\frac{1}{2}\cdot\frac{-4x\cdot\sqrt{\ell^2-x^2}-\left(\ell^2-2x^2\right)\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{\ell^2-x^2}}}{\left(\sqrt{\ell^2-x^2}\right)^2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{-4\cdot\sqrt{\ell^2-x^2}+\frac{\ell^2-2x^2}{\sqrt{\ell^2-x^2}}}{\ell^2-x^2}=$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{\frac{-4\cdot\left(\ell^2-x^2\right)+\ell^2-2x^2}{\sqrt{\ell^2-x^2}}}{\ell^2-x^2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{-4\ell^2+4x^2+\ell^2-2x^2}{\left(\ell^2-x^2\right)\sqrt{\ell^2-x^2}}=\underline{\frac{x}{2}\cdot\frac{2x^2-3\ell^2}{\left(\ell^2-x^2\right)\sqrt{\ell^2-x^2}}=S''}.$$

$$S''\left(\tfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{\ell^2}{2}-3\ell^2}{\left(\ell^2-\frac{\ell^2}{2}\right)\sqrt{\ell^2-\frac{\ell^2}{2}}}=\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{-2\ell^2}{\frac{\ell^2}{2}\sqrt{\frac{\ell^2}{2}}}=\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{-4}{\frac{\ell}{\sqrt{2}}}=-2<0 \Rightarrow \underline{Máx.\ c.q.j.}$$

****

5º) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. En función del parámetro α, discute y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$.

El teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+a-1-a^2-1=2a-1-a^2=-\left(a^2-2a+1\right)=-(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

$$Para\ \ a=1 \ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=1<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

(Dos grados de libertad)

Para α ≠ 1 el sistema es compatible determinado; resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2}=\frac{a+a+a-1-a^3-1}{-(a-1)^2}=\frac{-a^3+3a-2}{-(a-1)^2}=\frac{a^3-3a+2}{(a-1)^2}=\frac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2}=\underline{\underline{a+2=x}}.$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $\underline{a_1=1}$ y $\underline{a_2=-2}$ $\Rightarrow$ $\underline{a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)}$.

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2}=\frac{1+1+a^2-1-a-a}{-(a-1)^2}=\frac{a^2-2a+1}{-(a-1)^2}=\frac{(a-1)^2}{-(a-1)^2}=\underline{\underline{-1=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2}=\frac{1+a^2+1-a-a-1}{-(a-1)^2}=\frac{a^2-2a+1}{-(a-1)^2}=\frac{(a-1)^2}{-(a-1)^2}=\underline{\underline{-1=z}}.$$

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\{x+y+z=1$ que es compatible indeterminado.

Haciendo $\underline{x=\lambda}$ e $\underline{y=\mu}$:

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases},\ \forall\lambda,\ \mu\in R}}.$$

****

PROPUESTA B

1º) Calcula el valor de m para que la recta $r \equiv \frac{x}{2} = y = z$ y el plano $\pi \equiv x - y + mz = 4$ formen un ángulo de 30º.

2º) Encuentra los valores de α y b para los que A · A^t = I, siendo $A = \begin{pmatrix} \cos b & sen\, b & 0 \\ -sen\, b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3 y A^t la matriz traspuesta de A.

3º) Calcula la primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ de modo que $f(2) = \lim_{x \to 0} \frac{L(x^2 + 1)}{x}$.

(Resueltos en la propuesta A)

4º) i) Si h(x) es una función tal que h(0) = 0 y h'(0) = 1 y $g(x) = e^{sen\,[h(x)]}$, aplica la regla de la cadena para calcular la derivada g'(0).

ii) Calcula los posibles valores de α, b y c para los que $f(x) = a\,L\,x + bx + cx^2$ tiene en el punto P(1, 0) un mínimo relativo y cumple que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

----

i)

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones compuestas, es decir, funciones que son, a la vez, funciones de otras funciones. Si una función es a su vez composición de dos funciones, $(g \circ f)(x) = f[g(x)]$, su derivada es de la siguiente forma y se denomina “regla de la cadena”: $\underline{(g \circ f)'(x) = f'[g(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)}$.

$$g'(x) = \{e^{sen\,[h(x)]}\}' = \{sen\,[h(x)]\}' \cdot e^{sen\,[h(x)]} = \underline{h'(x) \cdot \cos\,[h(x)] \cdot e^{sen\,[h(x)]}}.$$

$$g'(0) = \{e^{sen\,[h(x)]}\}' = \{sen\,[h(x)]\}' \cdot e^{sen\,[h(x)]} = \underline{h'(0) \cdot \cos\,[h(0)] \cdot e^{sen\,[h(0)]}} = 1 \cdot \cos\,0 \cdot e^{sen\,0} =$$

$1 \cdot 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

$$\underline{\underline{g'(0) = 1}}$$

ii)

Por pasar por P(1, 0) es $f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = a\,L1 + b + c = 0$;; $\underline{b + c = 0}$.   (1)

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada para el valor de la abscisa de ese punto:

$$f'(x) = \frac{a}{x} + b + 2cx \Rightarrow f'(1) = 0 \;;;\; \frac{a}{1} + b + 2c = 0 \;;;\; \underline{a + b + 2c = 0}. \quad (2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{a\,L\,x + bx + cx^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{a\,L\,x}{x^2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} + \lim_{x \to +\infty} c =$$

$$= a \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x^2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} + c. \qquad (*)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x^2} = \frac{L\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L`Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = \underline{0}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = \frac{b}{\infty} = \underline{0}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos: $a \cdot 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$.

Sustituyendo en (1) el valor de c: $b + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = -1}}$.

Sustituyendo en (2) los valores de b y c: $a - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}$.

****

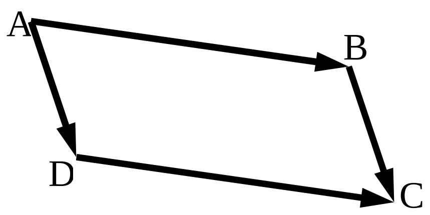
5º) Sean A(2, -1, 0), B(-2, 1, 0) y C(0, 1, 2) tres vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

i) Determina el vértice D.

ii) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro (punto de corte de sus diagonales) del paralelogramo ABCD y que es perpendicular al plano π que los contiene.

----

i)



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \left.\begin{cases} \overrightarrow{AB}=B-A=(-2,\ 1,\ 0)-(2,\ -1,\ 0)=(-4,\ 2,\ 0) \\ \\ \overrightarrow{DC}=C-D=(0,\ 1,\ 2)-(x,\ y,\ z)=(-x,\ 1-y,\ 2-z) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x=-4 \\ 1-y=2 \\ 2-z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=4 \\ y=-1 \\ z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{D(4,\ -1,\ 2)}}.$$

ii)

Los puntos A(2, -1, 0), B(-2, 1, 0) y C(0, 1, 2) determinan los vectores:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-4,\ 2,\ 0).$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 1,\ 2)-(2,\ -1,\ 0)=(-2,\ 2,\ 2).$$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 4(x-2)-8z+4z+8(y+1)=0\ ;;\ (x-2)-z+2(y+1)=0\ ;;$$

$$x-2-z+2y+2=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x+2y-z=0}.$$

El punto medio del paralelogramo es, por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos A y C (también es el punto medio de B y D):

$$M \Rightarrow \frac{A+C}{2} \Rightarrow \frac{(2,\ -1,\ 0)+(0,\ 1,\ 2)}{2} \Rightarrow \underline{M(1,\ 0,\ 1)}.$$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ -1)$.

La expresión de la recta r, expresada por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{\underline{r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}}}$$

****