PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Determina para qué valores de α la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x-y+3z=a \end{cases}$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 3x+az=4$ son paralelos.

La recta r y el plano π son paralelos cuando no tienen ningún punto en común; es decir, cuando el sistema que forman es incompatible.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que un sistema de ecuaciones lineales es incompatible cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen rangos diferentes.

El sistema que forman r y π es: $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x-y+3z=a \\ 3x+az=4 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & a \\ 3 & 0 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de α es el siguiente:

$$\left| M \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a + 9 + 3 - a = 12 - 3a = 3(4-a) = 0 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

Para α = 4 la matriz M’ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 12 + 21 - 4 = 21 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}.$$

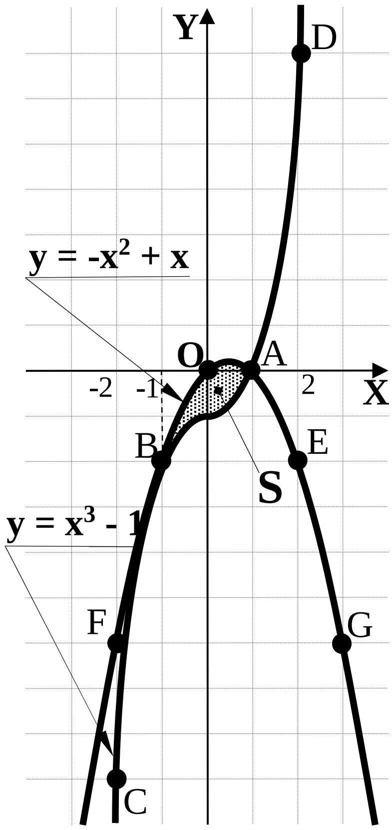
$$\underline{Para \;\; a = 4 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; M' = 3 \;\Rightarrow\; Sistema \;\; Incompatible}$$

<u>Para α = 4 la recta r y el plano π son paralelos.</u>

****

2º) Dibuja las dos curvas $y = x^3 - 1$, $y = -x^2 + x$. Halla el área comprendida entre ambas.

Los puntos de corte de las gráficas se obtienen resolviendo el sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 1 \\ y = -x^2 + x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 1 = -x^2 + x \;\;;;\;\; x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini se obtienen las soluciones:

$\underline{x_1 = 1}$;; $\underline{x_2 = x_3 = -1}$.

Los puntos de corte son A(1, 0) y B(-1, -2).

Son puntos de $y = x^3 - 1$, C(-2, -9) y D(2, 7) y otros puntos de $y = -x^2 + x$ son E(2, -2), F(-2, -6) y G(3, -6).

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.

Como puede observarse, en el intervalo $(-1,\ 1)$, todas las ordenadas de la curva $y = -x^2 + x$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = x^3 - 1$, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} \left[\left(-x^2 + x\right) - \left(x^3 - 1\right)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^3 - x^2 + x + 1\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ u^2 = S}}$$

****

3º) Halla todas las matrices 2 x 2, que denotamos A, que cumplen las siguientes condiciones: $A^2 = O$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = O$. (O denota una matriz nula, $A^2 = A \cdot A$).

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O \;;\; \begin{pmatrix} a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \rightarrow \underline{c=-a} \\ b+d=0 \rightarrow \underline{d=-b} \end{cases}.$$

Según lo anterior, la matriz A resulta ser de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

$$A^2 = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} a^2 - ab & ab - b^2 \\ -a^2 + ab & -ab + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab = 0 \rightarrow a(a-b) = 0 \\ b^2 - ab = 0 \rightarrow b(b-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a = b, \ \forall a, b \in R}}.$$

$$\underline{\underline{\textit{Las matrices son de la forma } A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}, \ \forall a \in R}}$$

****

4º) Encuentra α y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ ax+b & si \quad 1\le x\le 2 \\ 2x^2 & si \quad 2<x \end{cases}$ sea continua en los puntos x = 1, x = 2. Determina, para los valores de α y b hallados, si la función es derivable en los puntos x = 1, x = 2.

Para que la función sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \quad x=1 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1^2 = \underline{1} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (ax+b) = \underline{a+b} = \underline{f(1)} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{a+b=1} \qquad (1)$$

Para que la función sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \quad x=2 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (ax+b) = 2a+b = \underline{f(2)} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (2x^2) = \underline{8} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{2a+b=8} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 2a+b=8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a-b=-1 \\ 2a+b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=7} \;;;\; \underline{b=-6}.$$

<u>La función f(x) es continua para x = 1 y x = 2 para los valores a = 7 y b = -6.</u>

Para a = 7 y b = -6 la función es $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ 7x-6 & si \quad 1\le x\le 2 \\ 2x^2 & si \quad 2<x \end{cases}$

La función f(x) será derivable para x = 1 y para x = 2 cuando las derivadas para esos valores por la izquierda y por la derecha sean iguales.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<1 \\ 7 & si \quad 1\leq x\leq 2 \\ 4x & si \quad 2<x \end{cases}$.

$$Para \quad x=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f'(1^-)=2\cdot 1=\underline{2} \\ \\ f'(1^+)=\underline{7} \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{f'(1^-)\neq f'(1^+)}.$$

<u>La función no es derivable en x = 1.</u>

$$Para \quad x=2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f'(2^-)=\underline{7} \\ \\ f'(2^+)=4\cdot 2=\underline{8} \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{f'(2^-)\neq f'(2^+)}.$$

<u>La función no es derivable en x = 2.</u>

****

5º) Calcula la distancia del punto P(3, -1, 3) a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r) = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right|}$, siendo Q un punto de r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de r.

Un vector director de la recta r puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtienen al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j - 2k - k + i - 2j = 2i - j - 3k = \underline{(2,\ -1,\ -3) = \overrightarrow{v}}.$$

Un punto de la recta r es Q(1, 1, 1).

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,\ -1,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(2,\ -2,\ 2)}.$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{\left| 6i + 4j - 2k + 4k + 2i + 6j \right|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} =$$

$$= \frac{\left| 8i + 10j + 2k \right|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \left| 4i + 5j + k \right| = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{4^2 + 5^2 + 1^1} = \frac{2\sqrt{42}}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{2\sqrt{3}\ unid. = d(P,\ r)}}.$$

****

PROPUESTA B

1º) Determina para qué valores de α la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x-y+3z=a \end{cases}$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 3x+az=4$ son paralelos.

2º) Dibuja las dos curvas $y=x^3-1$, $y=-x^2+x$. Halla el área comprendida entre ambas.

3º) Halla todas las matrices 2 x 2, que denotamos A, que cumplen las siguientes condiciones: $A^2=O$ y $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \cdot A=O$. (O denota una matriz nula, A^2 = A · A).

(Resueltos en la propuesta A)

4º) Encuentra α, b y c para los que la función $f(x)=a\,L\,x+bx+cx^2$ tiene en el punto $P(1,\ 0)$ un mínimo relativo y cumple $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}=1$.

Por pertenecer el punto P(1, 0) a la función se cumple:

$$f(1)=0 \Rightarrow a\,L1+b\cdot 1+c\cdot 1^2=0\ ;;\ a\cdot 0+b+c=0\ ;;\ \underline{b+c=0}. \qquad (1)$$

Por tener en P(1, 0) un mínimo relativo tiene que anularse su primera derivada para el valor x = 1:

$$f'(x)=a\cdot\frac{1}{x}+b+2cx \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow a\cdot\frac{1}{1}+b+2c\cdot 1=0\ ;;\ \underline{a+b+2c=0}. \qquad (2)$$

Por último, por cumplirse que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}=1$, es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x \to +\infty} \frac{a\,L\,x+bx+cx^2}{x^2}=\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{a\,L\,x}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)=\lim_{x \to +\infty}\frac{a\,L\,x}{x^2}+$$

$$+\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{b}{x}+c\right)=A+\frac{b}{\infty}+c=A+0+c=\underline{A+c=1}.\ (*)$$

$$A=\lim_{x \to +\infty}\frac{a\,L\,x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x \to +\infty}\frac{a\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x \to +\infty}\frac{a}{2x^2}=\frac{a}{\infty}=\underline{0}.$$

Sustituyendo el valor de A en (*) resulta: $\underline{\underline{c=1}}$.

Sustituyendo el valor de c en (1): $\underline{\underline{b=-1}}$.

Sustituyendo en (2) los valores obtenidos de b y c:

$a+b+2c=0 \;\; ;; \;\; a-1+2\cdot 1=0 \;\; ;; \;\; a-1+2=0 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{a=-1}}.$

$$\underline{\underline{La \quad función \quad resulta \quad f(x)=-L\,x-x+x^2}}$$

****

5º) Sean r y s las rectas en el espacio dadas por las ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y - 3z = a \end{cases}$. Calcula para qué valores de α las rectas se cortan en un punto. Halla dicho punto. Estudia la posición relativa que tienen las rectas para el resto de los valores de α.

Para que las rectas r y s se corten en un punto es necesario que el sistema que forman sea compatible determinado.

La solución del sistema son las coordenadas del punto de corte pedido.

Las rectas r y s forman el sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + 2y - 3z = a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & a \end{pmatrix}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales.

El rango de M es el siguiente:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}.$$

Para que el sistema sea compatible determinado tiene que ser Rango M’ = 3, o sea, tiene que ser $|M'| = 0$:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \\ F_4 \to F_4 + 2F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & a+2\end{vmatrix}=0\ ;;\ \begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & a+2\end{vmatrix}=0\ ;;\ 3(a+2)-10+18-15+9-4(a+2)=0\ ;;$$

$$-(a+2)-25+27=0\ ;;\ a+2=2\ ;;\ \underline{a=0}\,.$$

Las rectas se cortan en un punto para α = 0.

Para determinar el punto de corte resolvemos el sistema formado por tres de las ecuaciones del sistema determinado por r y s, por ejemplo, las tres primeras. Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{1+2+2-4}{1+1+1-2}=\underline{1=x}\ \ ;;\ \ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}}{1}=2+4-1-4=\underline{1=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{1}=-4+4+1+4-2-2=\underline{1=z}\,.$$

El punto de corte es P(1, 1, 1).

Teniendo en cuenta que, según los rangos de M y M' pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A' = 2 → Coincidentes ;; Rango A = 2 ;; Rango A' = 3 → Paralelas

Rango A = Rango A' = 3 → Secantes ;; Rango A = 3 ;; Rango A' = 4 → Se cruzan.

Considerando que $\forall a \in R,\ a \neq 0$ los rangos de M y M' son 3 y 4, respectivamente:

Para α ≠ 0 las rectas r y s se cruzan.

****