PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$, obtener, en función de a, b y c, el valor de su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{Restando\ \ a\ \ cada\ \ columna\ \ la\ \ anterior\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & -a & 0 & 0 \\ 1 & b & -b & 0 \\ 1 & 0 & c & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & c & -c \end{vmatrix} = \underline{\underline{-abc=|A|}}$$

****

2º) Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{tag\ x - sen\ x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{tag\ x - sen\ x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow Aplicando\ \ la\ \mathrm{Re}gla\ \ de\ \ L'Hopital\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

<u>Nota</u>: La expresión $1 - \cos^3 x$ se ha descompuesto teniendo en cuenta el siguiente producto notable: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

****

3º) Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,\ 1)$. ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo $(-1,\ 0)$? Razona la respuesta.

Consideremos la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo cual, lo será en cualquier intervalo real que se considere.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 1\ \ y\ \ f(1) = 1 + 1 - 7 + 1 = -4$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función f(x) tiene, al menos, una raíz x = a, teniendo que ser 0 < a <1 y tal que f(a) = 0.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

Para el intervalo $(-1,\ 0)$ es $f(-1) = -1 + 1 + 7 + 1 = 8\ \ y\ \ f(0) = 1$. Como el valor de la función tiene el mismo signo para los valores extremos del intervalo considerado, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (-1, 0):

No se puede afirmar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tenga solución en $(-1,\ 0)$

****

4º) Halla una primitiva de la integral $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} \cdot dx$ que se anule para x = 0.

Siendo $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$, el conjunto de sus infinitas funciones primitivas constituyen las soluciones de la integral indefinida $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} \cdot dx$, cuyo valor es el siguiente:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \end{array} \middle\| \; x^2\,dx = -\frac{1}{3}dt \right\} \Rightarrow I = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{3} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \underline{-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C = I}$$

La función primitiva pedida F(x) es tal que F(0) = 0:

$$F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C \;\Rightarrow\; F(0) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-0^3} + C = -\frac{2}{3} + C = 0 \;\Rightarrow\; \underline{C = \frac{2}{3}}.$$

$$F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{1-x^3}\right) = F(x)}}$$

****

5º) Averigua para qué valor de m la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$ se corta con la siguiente recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$. Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas.

El estudio de la posición relativa mediante vectores directores es como sigue.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;\;;;\;\; \left.\begin{matrix} x+2y=m-5\lambda \\ 2x-y=2+\lambda \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} x+2y=m-5\lambda \\ 4x-2y=4+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=(m+4)-3\lambda$$

$$\underline{x=\frac{m+4}{5}-\frac{3}{5}\lambda} \;\;;;\;\; \left.\begin{matrix} 2x+4y=2m-10\lambda \\ -2x+y=-2-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5y=(2m-2)-11\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=\frac{2m-2}{5}-\frac{11}{5}\lambda}$$

$$\Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\frac{m+4}{5}-\frac{3}{5}\lambda \\ y=\frac{2m-2}{5}-\frac{11}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{a}=\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{11}{5},\ 1\right)}$$

Puede considerarse vector director de r a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{a}$, por ejemplo, $\overrightarrow{v_r}=(3,\ 11,\ -5)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v_s}=(2,\ 3,\ 5)$, que es linealmente independiente del vector $\overrightarrow{v_r}$ por cumplirse que $\frac{3}{2} \neq \frac{11}{3} \neq \frac{-5}{5}$, lo cual significa que las rectas se cortan o se cruzan.

Para diferenciar el caso determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de la recta r, por ejemplo, $A\left(\frac{m+4}{5},\ \frac{2m-2}{5},\ 0\right)$ y como extremo un punto de la recta s, por ejemplo, B(1, -1, 4):

$$\overrightarrow{w}=B-A=(1,\ -1,\ 4)-\left(\frac{m+4}{5},\ \frac{2m-2}{5},\ 0\right)=\left(1-\frac{m+4}{5},\ -1-\frac{2m-2}{5},\ 4-0\right)=$$

.

$$=\left(\frac{5-m-4}{5},\ \frac{-5-2m+2}{5},\ 4\right)=\underline{\left(\frac{1-m}{5},\ \frac{-3-2m}{5},\ 4\right)=\overrightarrow{w}}$$

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{w}$ son coplanarios, las rectas se cortan; en caso contrario, se cruzan.

Tres vectores son coplanarios cuando el rango de la matriz que determinan es menor que tres, o sea, que el valor del determinante que forman tiene que ser cero:

$$\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 11 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \\ \frac{1-m}{5} & \frac{-3-2m}{5} & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ \begin{vmatrix} 3 & 11 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1-m & -3-2m & 20 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1-m & -3-2m & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 36-2(-3-2m)+11(1-m)+3(1-m)-3(-3-2m)-88=0 \ ;;$$

$$-52-5(-3-2m)+14(1-m)=0 \ ;; \ -52+15+10m+14-14m=0 \ ;; \ -4m=23 \ ;; \ \underline{\underline{m=-\frac{23}{4}}}$$

El coseno del ángulo que forman dos vectores se deduce de su producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(3,\ 11,\ -5)\cdot(2,\ 3,\ 5)}{\sqrt{3^2+11^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+5^2}} =$$

$$= \frac{6+33-25}{\sqrt{9+121+25}\cdot\sqrt{4+9+25}} = \frac{14}{\sqrt{155\cdot 38}} = \frac{14}{\sqrt{5890}} = \underline{\underline{0'1824 = \cos\alpha}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$, obtener, en función de a, b y c, el valor de su determinante.

2º) Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{tag\ x - sen\ x}$.

3º) Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,\ 1)$. ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo $(-1,\ 0)$? Razona la respuesta.

(Resueltos en la propuesta A)

4º) Halla el área limitada por la curva $y = x \cdot e^{-x^2}$, el eje de abscisas y la recta x = a, siendo a la abscisa del punto máximo de la curva.

El punto máximo de la curva se produce para el valor de x que anula la primera derivada y hace negativa la segunda derivada:

$$y' = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = \underline{e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = y'}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \;;;\; 1-2x^2 = 0 \;;;\; x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}} \;;;\; \underline{x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$y'' = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(1-2x^2\right) + e^{-x^2} \cdot (-4x) = e^{-x^2}\left[-2x\left(1-2x^2\right) - 4x\right] = e^{-x^2}\left(-2x + 4x^3 - 4x\right) =$$

$$= e^{-x^2}\left(4x^3 - 6x\right) = \underline{2x\,e^{-x^2}\left(2x^2-3\right) = y''}$$

$$y''_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (-2) < 0 \;\Rightarrow\; \underline{M\acute{a}ximo \;\; para \;\; x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$y''_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (-2) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{M\acute{i}nimo \;\; para \;\; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Teniendo en cuenta que el único punto de corte de la curva con el eje de abscisas es el origen de coordenadas y que para valores de x mayores que cero los valores de las ordenadas son positivas, el valor del área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x\,dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right\| \begin{array}{c} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = -\dfrac{1}{2} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-\frac{1}{2}} e^t \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[e^t\right]_0^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}} - e^0 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e}} = \underline{\underline{\frac{e - \sqrt{e}}{2e}\ u^2 = S}}$$

****

5º) Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=2,\ \pi_2 \equiv 2x+3y+z=3 \ \ y \ \ \pi_3 \equiv ax+10y+4z=b$. Determina a y b para que los planos se corten en una recta r. Da algún tipo de ecuaciones para r (las que quieras).

Existen diversas formas de resolver este ejercicio. Una de ellas es la siguiente:

Los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=2 \ \ y \ \ \pi_2 \equiv 2x+3y+z=3$ determinan la recta r pedida, cuyas ecuaciones en forma de ecuaciones paramétricas y continua son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-4+2\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1+\lambda}$$

$$x+y=2-\lambda \ \ ;; \ \ y=2-\lambda-x=2-\lambda+1-\lambda=\underline{3-2\lambda=x}$$

$$Paramétricas: \ \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}} \qquad Contínuas: \ \underline{\underline{r \equiv \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}}}$$

Para que el plano π_3 contenta a la recta r tiene que contener a todos sus puntos; teniendo en cuenta que tenemos dos incógnitas, consideramos dos puntos de la recta r, por ejemplo: $\begin{cases} \lambda=0 \ \rightarrow \ \underline{A(3,\ -1,\ 0)} \\ \lambda=1 \ \rightarrow \ \underline{B(1,\ 0,\ 1)} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_3 \equiv ax+10y+4z=b \\ A(3,\ -1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-10+0=b \ \ ;; \ \ \underline{3a-b=10} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_3 \equiv ax+10y+4z=b \\ B(1,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow a+0+4=b \ \ ;; \ \ \underline{a-b=4} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones (1) y (2) obtenemos los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 3a-b=10 \\ a-b=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a-b=10 \\ -a+b=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a=6 \ \ ;; \ \ \underline{\underline{a=3}} \ \ ;; \ \ \underline{\underline{b=-1}}$$

****