PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2006

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Encuentra un polinomio de segundo grado y = P(x) tal que y(0) = -1, y(1) = 0 e $y(2)=3$. ¿Es único tal polinomio?

Sea el polinomio $y = P(x) = ax^2 + bx + c$.

Por ser $y(0) = -1 \Rightarrow \underline{c = -1}$.

Por ser $y(1) = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0 \;;;\; \underline{a + b = 1} \qquad (1)$

Por ser $y(2) = 3 \Rightarrow 4a + 3b - 1 = 3 \;;;\; \underline{4a + 3b = 4} \qquad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 4a+3b=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3a-3b=-3 \\ 4a+3b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=1} \;;;\; a+b=1 \rightarrow 1+b=1 \;;;\; \underline{b=0}$$

$$\underline{\underline{El \;\; polinomio \;\; pedido \;\; es \;\; y = P(x) = x^2 - 1}}$$

El polinomio es único por ser única la solución del sistema.

****

2º) Calcula $I=\int \sqrt{16-x^2}\cdot dx$ (expresa el resultado en función de la variable x).

Este tipo de integrales se resuelve por cambio de variable de la forma siguiente:

$$I=\int \sqrt{16-x^2}\cdot dx=\int \sqrt{4^2-x^2}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{cases} x=4\,sen\ t \\ dx=4\cos\ t\cdot dt \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} sen\ t=\dfrac{x}{4} \\ t=arc\ sen\ \dfrac{x}{4} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\int \sqrt{4^2-(4\,sen\ t)^2}\cdot 4\cos\ t\cdot dt=4\cdot\int \sqrt{4^2-4^2\cdot sen^2\ t}\cdot \cos\ t\cdot dt=$$

$$=4\int \sqrt{4^2(1-sen^2\ t)}\cdot \cos\ t\cdot dt=4\int 4\sqrt{1-sen^2\ t}\cdot \cos\ t\cdot dt=16\int \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos\ t\cdot dt=$$

$$=16\int \cos\ t\cdot \cos\ t\cdot dt=16\int \cos^2 t\cdot dt \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\ t+\cos^2 t=1 \\ \cos^2 t-sen^2\ t=\cos\ (2t) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cos^2 t=1+\cos\ (2t)\ \ ;;\ \ \underline{\cos^2 t=\frac{1+\cos\ (2t)}{2}}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de $\cos^2$ t, resulta:

$$I=16\int \frac{1+\cos\ (2t)}{2}\cdot dt=8\int [1+\cos\ (2t)]\cdot dt=8\cdot\left[\int dt+\int \cos\ (2t)\cdot dt\right]=\underline{8\cdot[t+I_1]} \qquad (**)$$

$$I_1=\int \cos\ (2t)\cdot dt\ \Rightarrow \left.\begin{cases} 2t=h \\ dt=\dfrac{1}{2}\cdot dh \end{cases}\right\} \Rightarrow\ I_1=\frac{1}{2}\cdot\int \cos\ h\cdot dh=\frac{1}{2}sen\ h=\underline{\frac{1}{2}sen\ (2t)=I_1}$$

Sustituyendo en (**) el valor obtenido de I_1, queda:

$$I=8\cdot\left[t+\frac{1}{2}\cdot sen\ (2t)+C\right]=8t+4\cdot sen\ (2t)+C=8t+4\cdot 2\cdot sen\ t\cdot \cos\ t+C=$$

$$=8t+8\,sen\ t\cdot \cos\ t+C=\underline{8(t+sen\ t\cdot \cos\ t)+C=I}$$

Deshaciendo el cambio de variable y teniendo en cuenta que si $sen\ t=\frac{x}{4}$, sería:

$$\cos\ t=\sqrt{1-sen^2\ t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}=\underline{\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2}=\cos\ t}\,.$$

$$I = 8\left[arc\ sen\ \frac{x}{4} + \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2}\right] + C = \underline{\underline{8\,arc\ sen\ \frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C = I}}$$

****

3º) Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sería: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+5b & a+3b \\ 2c+5d & c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2a+5b=1 \\ a+3b=3 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 2c+5d=4 \\ c+3d=2 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Resolviendo los dos sistemas resultantes:

$$\left. \begin{array}{l} 2a+5b=1 \\ a+3b=3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{r} -2a-5b=-1 \\ 2a+6b=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b=5} \;\; ;; \;\; a+3b=3 \;\; ;; \;\; a+15=3 \;\; ;; \;\; \underline{a=-12}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2c+5d=4 \\ c+3d=2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{r} -2c-5d=-4 \\ 2c+6d=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{d=0} \;\; ;; \;\; c+3d=2 \;\; ;; \;\; \underline{c=2}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x+y-2z+4=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-2y-5z+7=0 \\ 3x+4y-6z+9=0 \end{cases}$, determina si los vectores directores de las rectas son perpendiculares o no.

La expresión de las rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-2z+4=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=-4+2\lambda \\ x-y=-3-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=-7+\lambda \;;;\; \underline{x=-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\lambda}$$

$$x-y=-3-\lambda \;;;\; -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\lambda-y=-3-\lambda \;;;\; \underline{y=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\lambda \\ y=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-2y-5z+7=0 \\ 3x+4y-6z+9=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y=-7+5\lambda \\ 3x+4y=-9+6\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x-4y=-14+10\lambda \\ 3x+4y=-9+6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x=-23+16\lambda \;;;\; \underline{x=-\frac{23}{7}+\frac{16}{7}\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{r} -6x+6y=21-15\lambda \\ 6x+8y=-18+12\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 14y=3-3\lambda \;;;\; y=\frac{3}{14}-\frac{3}{14}\lambda \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=-\frac{23}{7}+\frac{16}{7}\lambda \\ y=\frac{3}{14}-\frac{3}{14}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-2z+4=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x-2y-5z+7=0 \\ 3x+4y-6z+9=0 \end{cases}$$

Dos vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 5,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_s}=(32,\ -3,\ 14)$.

Como puede observarse, los vectores son linealmente independientes, o sea, que <u>las rectas no son paralelas</u>.

Si las rectas fueran perpendiculares el producto escalar de los vectores directores tendría que ser cero:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=(1,\ 5,\ 4)\cdot(32,\ -3,\ 14)=32-15+56\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{r\ \ y\ \ s\ \ no\ \ son\ \ perpendiculares.}}$$

****

5º) Estudia (dominio, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa la función $y = \frac{L\,x}{x}$.

Teniendo en cuenta que solamente tienen logaritmo los números positivos, el dominio de la función es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (0,\ +\infty)}}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento obtenemos la primera derivada:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - L\,x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - L\,x}{x^2}.$$

Por ser el denominador positivos para cualquier valor real de x, la derivada será positiva o negativa cuando lo sea el numerador:

$$y' = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1 - L\,x}{x^2} = 0 \ ;; \ 1 - L\,x = 0 \ ;; \ L\,x = 1 \ ;; \ \underline{x = e}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow \ (0,\ 1)}} \ ;; \ \underline{\underline{Decrecimiento \ \Rightarrow \ (1,\ +\infty)}}$$

La función puede tener máximos y mínimos para los valores que anulan el numerador, o sea, para x = e.

Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo recurrimos a la segunda derivada:

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - L\,x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - L\,x)}{x^4} = \frac{-1 - 2(1 - L\,x)}{x^3} = \frac{-1 - 2 + 2\,L\,x}{x^3} = \underline{\frac{2\,L\,x - 3}{x^3}}$$

$$y''(e) = \frac{2\,L\,e - 3}{e^3} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \ \Rightarrow \ \underline{Máximo \ \ relativo \ \ para \ \ x = e}.$$

$$y(e) = \frac{L\,e}{e} = \frac{1}{e} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Máximo: \ A\left(e,\ \frac{1}{e}\right) \cong (2'73,\ 0'37)}}.$$

(Nótese que la deducción de máximo se puede deducir por ser una función continua en su dominio y los periodos de crecimiento y decrecimiento).

Las asíntotas horizontales son los valores de la función cuando $x \to \pm\infty$; teniendo en cuenta el dominio de la función, solamente pueden ser cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}$$

La recta y = 0 (Eje X) es asíntota horizontal.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x para los cuales se anula el denominador, que en el caso que nos ocupa, solamente puede obtenerse a partir del límite lateral por la derecha, que es donde existe la función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{L\,x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = \underline{-\infty}$$

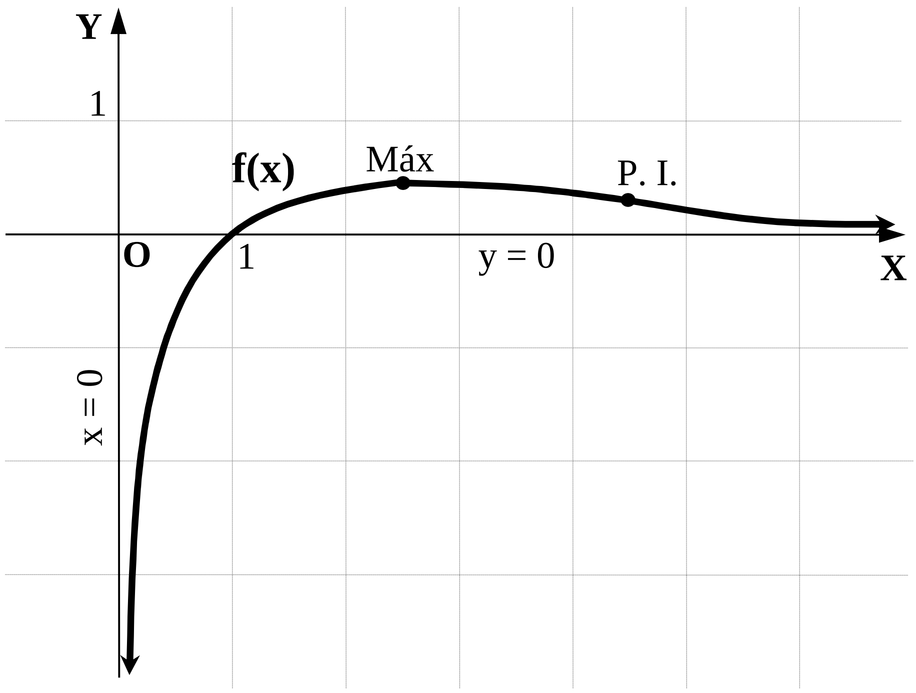
La recta x = 0 (Eje Y) es asíntota vertical.

De los datos obtenidos anteriormente se deduce que la función tiene un punto de inflexión, que es el siguiente:

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\,L\,x - 3}{x^3} = 0 \;\;;;\;\; 2\,L\,x - 3 = 0 \;\;;;\;\; L\,x^2 = 3 \;\;;;\;\; x^2 = e^3 \;\;;;\;\; \underline{x = +\sqrt{e^3} \cong 4'48}$$

$$y\left(\sqrt{e^3}\right) = \underline{\frac{1'5}{\sqrt{e^3}} \cong 0'33 = y} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{Punto\;\; de\;\; Inflexión: B\left(\sqrt{e^3},\; \frac{1'5}{\sqrt{e^3}}\right) \cong (4'48,\; 0'33)}$$

La gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

PROPUESTA B

1º) Encuentra un polinomio de segundo grado y = P(x) tal que y(0) = -1, y(1) = 0 e $y(2)=3$. ¿Es único tal polinomio?

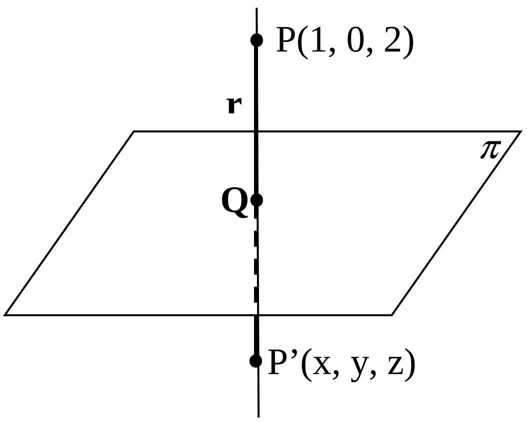
2º) Calcula $\int \sqrt{16-x^2}\cdot dx$ (expresa el resultado en función de la variable x).

3º) Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

(Resueltos en el Repertorio A)

4º) Halla el simétrico del punto P(1, 0, 2) con respecto al plano $\pi \equiv y-2z+1=0$.

Un vector normal al plano π es $\overrightarrow{n}=(0,\ 1,\ -2)$.



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director pude ser el normal del plano, y entonces: $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\pi \equiv y-2z+1=0 \;\Rightarrow\; \lambda-2(2-2\lambda)+1=0 \;;;\; \lambda-4+4\lambda+1=0 \;;;\; 5\lambda=3 \;;;\; \underline{\lambda=\frac{3}{5}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=1 \;;;\; y=\frac{3}{5} \;;;\; z=2-2\cdot\frac{3}{5}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \underline{Q\left(1,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'} \;\Rightarrow\; Q-P=P'-Q \;;;\; \left(1,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)-(1,\ 0,\ 2)=(x,\ y,\ z)-\left(1,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right) \;;;$$

$$\left(0,\ \frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)=\left(x-1,\ y-\frac{3}{5},\ z-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x-1=0 & \rightarrow\ \underline{x=1} \\ y-\frac{3}{5}=\frac{3}{5} & \rightarrow\ \underline{y=\frac{6}{5}} \\ z-\frac{4}{5}=-\frac{6}{5} & \rightarrow\ \underline{z=-\frac{2}{5}} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P'\left(1,\ \frac{6}{5},\ -\frac{2}{5}\right)}}$$

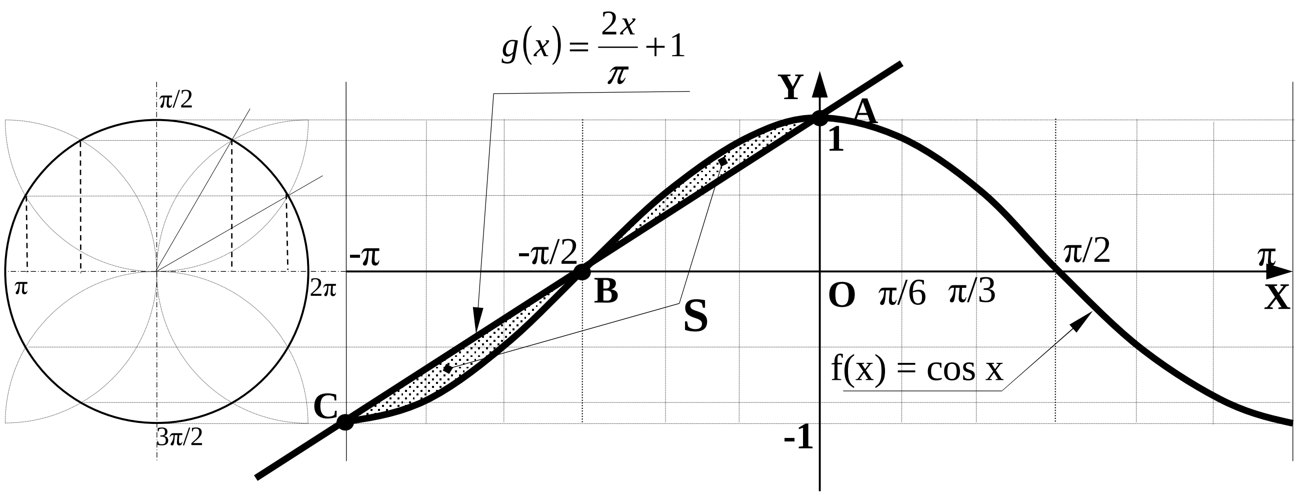
****

5º) Dibuja la figura comprendida entre las funciones $f(x)=\cos\ x$ y $g(x)=\frac{2x}{\pi}+1$ y calcula su área. (El coseno está expresado en radianes).

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen igualándolas:

$$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ \cos\ x=\frac{2x}{\pi}+1\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{x_1=0}\ \rightarrow\ \underline{A(0,\ 1)}\\ \underline{x_2=-\frac{\pi}{2}}\ \rightarrow\ \underline{B\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)}\\ \underline{x_3=-\pi}\ \rightarrow\ \underline{C(-\pi,\ -1)}\end{cases}$$

La representación grafica de la situación es la indicada en la figura.



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi}[f(x)-g(x)]\cdot dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[f(x)-g(x)]\cdot dx=[F(x)-G(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi}+[F(x)-Q(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=$$

$$=[F(-\pi)-G(-\pi)]-[F(-\tfrac{\pi}{2})-G(-\tfrac{\pi}{2})]+[F(0)-G(0)]-[F(-\tfrac{\pi}{2})-G(-\tfrac{\pi}{2})]=$$

$$=F(-\pi)-G(-\pi)-F(-\tfrac{\pi}{2})+G(-\tfrac{\pi}{2})+F(0)-G(0)-F(-\tfrac{\pi}{2})+G(-\tfrac{\pi}{2})=$$

$$=\underline{F(-\pi)-G(-\pi)-2F(-\tfrac{\pi}{2})+2G(-\tfrac{\pi}{2})+F(0)-G(0)=S}$$

Siendo F(x) y G(x) las funciones integrales de f(x) y g(x), respectivamente:

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\cos\ x\cdot dx=\underline{sen\ x}\ \ ;;\quad G(x)=\int g(x)\cdot dx=\int\left(\frac{2x}{\pi}+1\right)\cdot dx=\underline{\frac{x^2}{\pi}+x}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de F(x) y G(x) en la expresión de S:

$$S = sen\,(-\pi) - \left[\frac{(-\pi)^2}{\pi} + (-\pi)\right] - 2\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\left[\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + sen\,0 - \left[\frac{0^2}{\pi} + 0\right] =$$

$$= 0 - (\pi - \pi) - 2 \cdot (-1) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + 0 - 0 = 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{8 + \pi - 2\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{8 - \pi}{4}\ u^2 = S}}$$

****