PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) ¿Para qué valores de a tiene soluciones el sistema $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+az=12 \end{cases}$? Resuelve el sistema en el caso $a=0$.

Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12,12,12)$ por $(12,12,24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & a & 12 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=-a+8-2+4+2-2a=12-3a=0;$$

$4-a=0 \Rightarrow a=4.$

$$\underline{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = S.C.D.}$$

Resolvemos para el caso de $a = 0$.

Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y = 12 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 12 & -1 & -1 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = 4 - 1 + 2 + 2 = 7.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 2 & 12 & -1 \\ 2 & 12 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{12} = 4 - 2 - 4 + 1 = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 12 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12} = -1 + 4 + 2 + 2 - 2 - 2 = 3.$$

$$\underline{Solución: x = 7,\ y = -1,\ z = 3.}$$

Si para un valor a el sistema es incompatible y, sabiendo que el rango de A es, por lo menos 2, por ser uno de sus menores $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tiene que ser, necesariamente $a = 3$, para que $|M| = 0$ y $Rang\ M = 2$.

Para que el sistema sea incompatible, según el teorema de Rouché-Fröbenius, tiene que ser $Rang\ M' = 3$, como se comprueba a continuación mediante el método de Gauss.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3, \text{ como queríamos comprobar.}$$

El nuevo sistema resulta ser: $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+4z=24 \end{cases}$, equivalente al sistema: $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ x+y+2z=12 \end{cases}$, que es, a su vez, equivalente al sistema $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. = S.C.I.}$$

****

2º) Justifica que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ es regular, y calcula su inversa.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1-1-1-1-1-1=-4\neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ tiene\ inversa, como\ se\ tenía\ que\ justificar.}$$

$$A^t=A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}}{-4}\Rightarrow \underline{A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}.$$

****

3º) Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 euros, y el del brazalete 320 euros. A cambio, por cada anillo gana 10 euros y por cada brazalete gana 90 euros. Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2.560 euros, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? ¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

Sean x e y el número de anillos y brazaletes que fabrica semanalmente el orfebre, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ 40x+320y\le 2.560 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ x+8y\le 64 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 2x+3y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

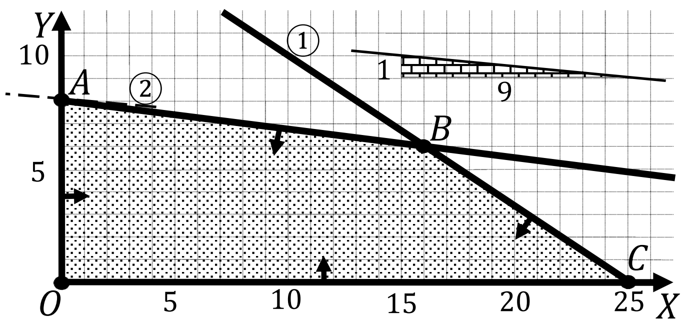
x	25	10
y	0	10

$② \Rightarrow x+8y\le 64 \Rightarrow y\le \frac{64-x}{8} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	24
y	8	5

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+8y=64 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,8).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=50 \\ x+8y=64 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-3y=-50 \\ 2x+16y=128 \end{array}\right\} \Rightarrow 13y=78;$

$y=\frac{78}{13} \Rightarrow y=6;\ \ x+48=64;\ \ x=16 \Rightarrow B(16,6)$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+3y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=50;\ \ x=25 \Rightarrow C(25,0).$

La función de objetivos: $f(x,y)=10x+90y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,8)=10\cdot 0+90\cdot 8=0+7200=720.$

$B \Rightarrow f(16,6)=10\cdot 16+90\cdot 6=160+540=700.$

$C \Rightarrow f(25,0) = 10 \cdot 25 + 90 \cdot 0 = 250 + 0 = 250.$

El valor máximo se produce en el punto $A(0,8)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 10x + 90y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{90}x = -\frac{1}{9}x \Rightarrow m = -\frac{1}{9}.$$

$$\underline{Maximiza\ el\ beneficio\ fabricando\ 0\ anillos\ y\ 8\ brazaletes\ a\ la\ semana.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 720\ euros\ a\ la\ semana.}$$

El número total de horas trabajadas es: $n_1 = 3 \cdot 8 = \underline{24}$.

Si se conoce de antemano que tiene que fabricar, al menos 8 anillos, el problema es el siguiente:

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y \le 50 \\ 40x + 320y \le 2.560 \\ x \ge 8;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + 3y \le 50 \\ x + 8y \le 64 \\ x \ge 8;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 2x + 3y \le 50 \Rightarrow y \le \frac{50-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	25	10
y	0	10

$② \Rightarrow x + 8y \le 64 \Rightarrow y \le \frac{64-x}{8} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

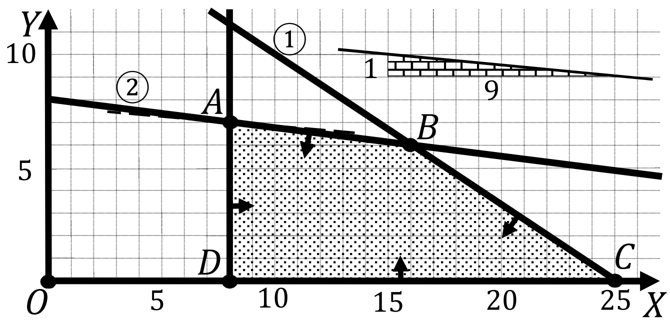
x	0	24
y	8	5

La nueva región factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ x + 8y = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$8 + 8y = 64;\ \ y = 7 \Rightarrow A(8,7).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 50 \\ x + 8y = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x - 3y = -50 \\ 2x + 16y = 128 \end{array}\right\} \Rightarrow 13y = 78; y = \frac{78}{13} \Rightarrow y = 6;\ \ x + 48 = 64;\ \ x = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(16,6).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + 3y = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 50;\ \ x = 25 \Rightarrow C(25,0).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(8, 0).$$

La función de objetivos sigue siendo la misma: $f(x, y) = 10x + 90y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(8, 7) = 10 \cdot 8 + 90 \cdot 7 = 80 + 630 = 710.$

$B \Rightarrow f(16, 6) = 10 \cdot 16 + 90 \cdot 6 = 160 + 540 = 700.$

$C \Rightarrow f(25, 0) = 10 \cdot 25 + 90 \cdot 0 = 250 + 0 = 250.$

$D \Rightarrow f(8, 0) = 10 \cdot 8 + 90 \cdot 0 = 80 + 0 = 80.$

El valor máximo se produce en el punto $A(8, 7)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 10x + 90y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{90}x = -\frac{1}{9}x \Rightarrow m = -\frac{1}{9}.$

$$\underline{Maximiza\ el\ beneficio\ fabricando\ 8\ anillos\ y\ 7\ brazaletes\ a\ la\ semana.}$$

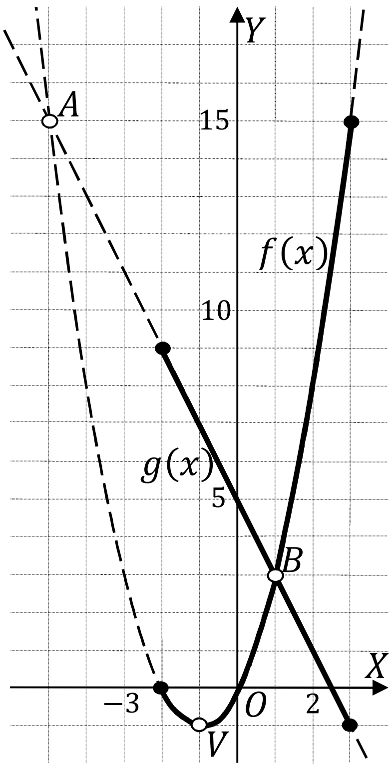
$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 710\ euros\ a\ la\ semana.}$$

El número total de horas trabajadas es: $n_2 = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 16 + 21 = \underline{37}$.

****

Bloque 2. Análisis.

4º) Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 5 - 2x$. ¿Qué punto $x = a$ hace que sea continua la función $h(x) = \begin{cases} f(x) \; si -2 \leq x < a \\ g(x) \; si \; a \leq x \leq 3 \end{cases}$? Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$?



Los puntos de corte de ambas funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x = 5 - 2x;$

$x^2 + 4x - 5 = 0;\;\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} =$

$= -2 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \rightarrow A(-5, 15) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 3) \end{cases}.$

El vértice de la parábola es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow V(-1, -1).$

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

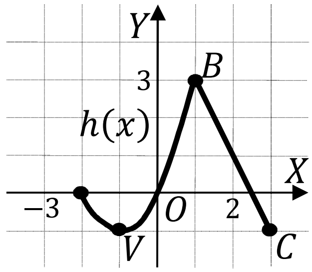
$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 + 2x) = a^2 + 2a.$

$\lim_{x \to a^+} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} (5 - 2x) = 5 - 2a = h(a).$

$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = h(a) \Rightarrow a^2 + 2a = 5 - 2a;\;\; a^2 + 4a - 5 = 0;$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = -2 \pm 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -5 \notin D(h) \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a = x = 1}.$



La última figura expresa la función $h(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$, donde se observa como máximo absoluto el punto $B(1, 3)$ y mínimos absolutos los puntos $V(-1, -1)$ y $C(3, -1)$.

****

5º) La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t, desde que arrancó en $t = 0$, viene dada por la función $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$ entre $t = 1 \ y \ t = 4$. En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

$a)$ Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua.

$b)$ La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir: $v(t) = e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$?

$c)$ Calcula la distancia recorrida entre $t = 3 \ y \ t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t) \cdot dt$?

$a)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{t \to 3^-} e(t) = \lim_{t \to 3} (120t + 90) = 120 \cdot 3 + 90 = 360 + 90 = 450.$$

$$\lim_{t \to 3^+} e(t) = \lim_{t \to 3} (C - 240t + 150t^2 - 20t^3) =$$

$$= C - 240 \cdot 3 + 150 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3^3 = C - 720 + 1.350 - 540 = C + 90 = e(3).$$

$$\lim_{t \to 3^-} e(t) = \lim_{t \to 3^+} e(t) = e(3) \Rightarrow 450 = C + 90; \;\; C = 360.$$

La función resulta: $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$.

$\underline{La \ función \ e(t) \ es \ continua \ en \ su \ dominio \ para \ C = 360}$.

$b)$

$$e(4) = 360 - 240 \cdot 4 + 150 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4^3 =$$

$$= 360 - 960 + 2.400 - 1.280 = 2760 - 2.240 \Rightarrow e(4) = 520.$$

Considerando que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$, la función puede expresarse de la forma siguiente: $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \\ 520 & si \quad 4 < t \leq 5 \end{cases}$.

$$v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & si \quad 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Para estudiar la continuidad de $v(t)$ es necesario que sea continua en los puntos $t = 3 \, y \, t = 4$.

Para $t = 3$:

$$\lim_{t \to 3^-} v(t) = \lim_{t \to 3} 120 = 120.$$

$$\lim_{t \to 3^+} v(t) = \lim_{t \to 3} (-240 + 300t - 60t^2) = -240 + 300 \cdot 3 - 60 \cdot 9 =$$

$$= -240 + 900 - 540 = 900 - 780 = 120 = v(3).$$

$$\lim_{t \to 3^-} v(t) = \lim_{t \to 3^+} v(t) = v(3) \Rightarrow v(t) \; es \; continua \; para \; t = 3.$$

Para $t = 4$:

$$\lim_{t \to 4^-} v(t) = \lim_{t \to 4} (-240 + 300t - 60t^2) = -240 + 300 \cdot 4 - 60 \cdot 16 =$$

$$= -240 + 1.200 - 960 = 1.200 - 1.200 = 0 = v(4).$$

$$\lim_{t \to 4^+} v(t) = \lim_{t \to 4} 0 = 0.$$

$$\lim_{t \to 4^-} v(t) = \lim_{t \to 4^+} v(t) = v(4) \Rightarrow v(t) \; es \; continua \; para \; t = 4.$$

$$\underline{La \; función \; v(t) \; es \; continua \; en \; su \; dominio}.$$

De la expresión $v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & si \quad 1 \le t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & si \quad 3 \le t \le 4 \\ 0 & si \quad 4 < t \le 5 \end{cases}$ se deduce que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$

$c)$

Teniendo en cuenta que si $v(t) = e'(t)$, puede hacerse lo siguiente:

$$\int v(t) \cdot dt = \int e'(t) \cdot dt = e(t).$$

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\int_3^4 v(t) \cdot dt = e(4) - e(3) \Rightarrow \int_3^4 (-240 + 300t - 60t^2) \cdot dt =$$

$$= \left[-240t + \frac{300t^2}{2} - \frac{60t^3}{3}\right]_3^4 = [-240t + 150t^2 - 20t^3]_3^4 =$$

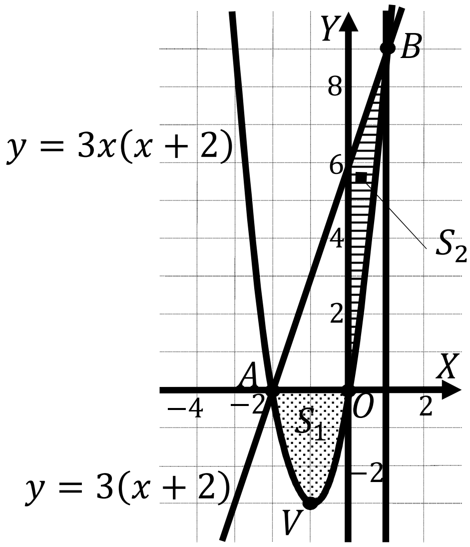
$$= (-240 \cdot 4 + 150 \cdot 16 - 20 \cdot 64) - (-240 \cdot 3 + 150 \cdot 9 - 20 \cdot 27) =$$

$$= (-960 + 2.400 - 1.280) - (-720 + 1.350 - 540) =$$

$$= (2.400 - 2.240) - (1.350 - 1.260) = 160 - 90 \Rightarrow \underline{e_{(3,4)} = 70}.$$

****

6º) Calcula el área de las dos regiones señaladas en el dibujo adjunto.



$$S_1 = \int_0^{-2}[3x(x+2)] \cdot dx = \int_0^{-2}(3x^2 + 6x) \cdot dx = \left[\frac{3 \cdot x^3}{3} + \frac{6 \cdot x^2}{2}\right]_0^{-2} =$$

$$= [x^3 + 3x^2]_0^{-2} = [(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2] - 0 = -8 + 12 \Rightarrow \underline{S_1 = 4\ u^2}.$$

$$S_2 = \int_0^1[3(x+2) - 3x(x+2)] \cdot dx = \int_0^1(3x + 6 - 3x^2 - 6x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1(-3x^2 - 3x + 6) \cdot dx = \left[-\frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = \left[-x^3 - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 6x\right]_0^1 =$$

$$= \left(-1^3 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 6 \cdot 1\right) - 0 = -1 - \frac{3}{2} + 6 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \underline{S_2 = 3{,}5\ u^2}.$$

****

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

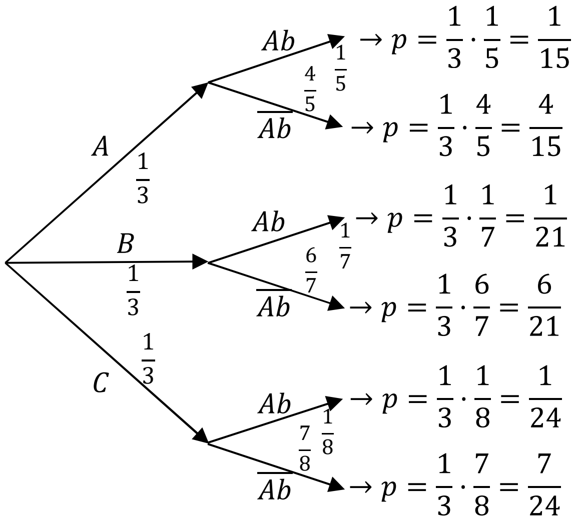
7º) En una clase hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

a) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero.

b) Si resulta que la abre, la probabilidad de que sea del llavero A.

----

a)



$$P = P(Ab) = P(A \cap Ab) + P(B \cap Ab) + P(C \cap Ab) =$$

$$= P(A) \cdot P(Ab/A) + P(B) \cdot P(Ab/B) + P(C) \cdot P(Ab/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{56+40+35}{840} = \underline{\frac{131}{840} = 0{,}1560.}$$

b)

$$P = P(Ab/A) = \frac{P(Ab \cap A)}{P(A)} = \frac{P(Ab) \cdot P(A/Ab)}{P(Ab)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{840}{15 \cdot 131} = \underline{\frac{56}{131} = 0{,}4275.}$$

****

8º) Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

$a)$ Calcula las probabilidades $P(X > 30)\ y\ P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor?

$b)$ Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?

$c)$ ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de $b)$ con el de $a)$, sin recurrir a la fórmula?

$a)$

$Datos$: $\mu = 25;\ \ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(25, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{5}$.

$$P = P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-25}{5}\right) = P\left(Z > \frac{5}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

$Datos$: $\mu = 28;\ \ \sigma = 1.$

$Y \to N(\mu;\ \sigma) = N(28, 1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-28}{1}$.

$$P = P(Y > 30) = P\left(Z > \frac{30-28}{1}\right) = P\left(Z > \frac{2}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa: P(X > 30) > P(Y > 30)}.$$

$b)$

$Datos$: $\mu = 25;\ \ \sigma = 5;\ \ n = 4.$

$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{\sqrt{4}}\right) = N(25;\ 2{,}5).$ $Z = \frac{X-25}{2{,}5}$.

$$P = P(\overline{X} > 30) = P\left(Z > \frac{30-25}{2{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{5}{2{,}5}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

$Datos$: $\mu = 25;\ \ \sigma = 5;\ \ n = 9.$

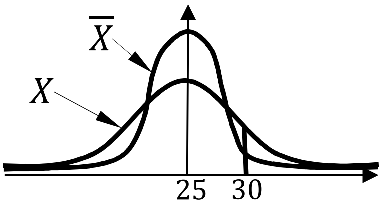
$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{\sqrt{9}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{3}\right).$ $Z = \frac{X-25}{\frac{5}{3}}$.

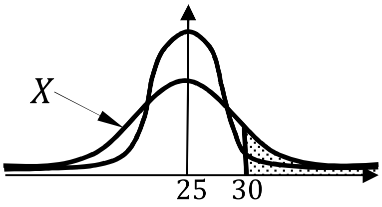
$$P = P(\overline{X} > 30) = P\left(Z > \frac{30-25}{\frac{5}{3}}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\frac{5}{3}}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = \underline{0{,}0013}.$$

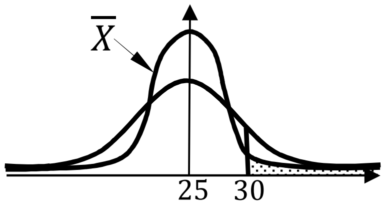
$c)$

La explicación puede ser la siguiente: La desviación típica de la variable es mayor que la correspondiente desviación típica de la media muestral, por ser $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con $n > 1$, por lo que la curva de la desviación normal de la variable es más plana que la curva de la desviación normal de la media muestral y, en consecuencia, la superficie de probabilidad de $P(X > 30)$ es mayor que la superficie de probabilidad $P(\overline{X} > 30)$, como se observa en la figura adjunta.





$P(X > 30)$



$P(\overline{X} > 30)$

****

9º) Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

a) ¿Puedes afirmar, con al menos el 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99 %?

b) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2{,}3263) = 0{,}99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99 %?

----

a)

Datos: $\mu = 8;\ \ \sigma = \sqrt{2}/5$.

$T \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N\left(8, \sqrt{2}/5\right)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8}{\sqrt{2}/5}$.

$P = P(T \leq 8{,}5) = P\left(Z \leq \frac{8{,}5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}5 \cdot 5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \leq 1{,}768) \cong$

$\cong 0{,}9612$.

Como quiera que: $0{,}95 < 0{,}9612 < 0{,}99$, puede afirmarse que la duración de la ofrenda será menor de 8 horas y media con una probabilidad superior al 95 %, pero no se puede afirmar con una probabilidad superior al 99 %.

b)

$Z \leq 2{,}3263 \Rightarrow Z = \frac{X-8}{\sigma} \Rightarrow \frac{8{,}5-8}{\sigma} \geq 2{,}3263;\ \ \sigma \leq \frac{0{,}5}{2{,}3263} \Rightarrow \underline{\sigma \leq 0{,}215}$.

****