PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y a uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionan otra.

Bloque 1. Álgebra.

1º) Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ay + az = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible determinado?

$b)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

$c)$ Resuelve el sistema para $a = 0$.

$a)\ b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix}.$$

Los rangos de las matrices, en función del parámetro a, se obtienen por el procedimiento de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & a & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - aF_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & a+2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2, \forall a \in R.$$

$$\underline{Para\ a \in R \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$c)$

Para $a = 0$ el sistema resulta: $\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = 2\lambda, z = -2\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Dada una matriz cuadrada A:

$a)$ ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo?

$b)$ Sea ahora la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Halla, si existe, la inversa de A.

$c)$ Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que: $\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\}$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero, por lo tanto, para saber si tiene inversa se calcula su determinante.

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ -2X - 2Y = -4A \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = -3A \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3X - 2Y = -A \\ 3X + 3Y = 6A \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = 5A \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x,y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8;\ \ 3x - 2y \leq 12;\ \ x + 5y \leq 21;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

a) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

b) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

----

a)

$① \Rightarrow 4x + y \geq 8 \Rightarrow y \geq 8 - 4x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	1	2
y	4	0

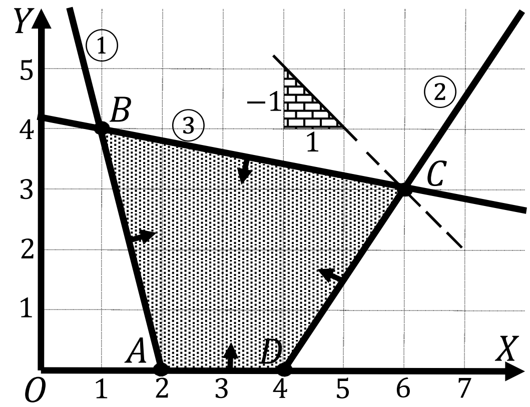
$② \Rightarrow 3x - 2y \leq 12 \Rightarrow y \geq \frac{3x-12}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	4	6
y	0	3

$③ \Rightarrow x + 5y \leq 21 \Rightarrow y \leq \frac{21-x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	1	6
y	4	3

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,0).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + y = 8 \\ x + 5y = 21 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - y = -8 \\ 4x + 20y = 84 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19y = 76;\ \ y = \frac{76}{19} = 4;\ \ 4x + 4 = 8;\ \ 4x = 4;\ \ x = 1 \Rightarrow B(1,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 21 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x + 2y = -12 \\ 3x + 15y = 63 \end{array}\right\} \Rightarrow 17y = 51;\ \ y = \frac{51}{17} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 15 = 21;\ \ x = 6 \Rightarrow C(6,3).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x - 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 12;\ \ x = 4 \Rightarrow D(4,0).$$

b)

La función de objetivos es $f(x,y) = x + y + 1$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,0) = 2 + 0 + 1 = 2.$ $\qquad$ $B \Rightarrow f(1,4) = 1 + 4 + 1 = 6.$

$C \Rightarrow f(6,3) = 6 + 3 + 1 = 10.$ $\qquad$ $D \Rightarrow f(4,0) = 4 + 0 + 1 = 5.$

El valor mínimo se produce en el punto $C(6, 3)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{1}$.

$$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ empresa\ es\ máximo\ para\ x = 6\ e\ y = 3.}$$

****

Bloque 2. Análisis.

4º) Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$.

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en $P(1, 0)$?

b) Con los valores de a y b del apartado anterior, calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$.

c) Calcula la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.
Nota: Si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma como valores $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados b) y c).

----

a)

Por contener al punto $P(1, 0)$ es $f(1) = 0$:

$f(1) = 1^4 - a \cdot 1^2 + b = 1 - a + b = 0;\ \ a - b = 1.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $P(1, 0)$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 2ax.$ $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 2a \cdot 1 = 0;\ \ 4 - 2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de a: $2 - b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

b)

La función resulta $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

La pendiente de la recta $y = 1$ es $m = 0$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

$\underline{Los\ puntos\ pedidos\ son\ A(0, 1), B(-1, 0)\ y\ P(1, 0)}$.

c)

El punto de tangencia en $P(1, 0)$. $m = f'(1) = 0$

$\underline{La\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv y = 0\ (eje\ X)}$.

****

5º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, 1 \leq x \end{cases}$:

a) ¿Para qué valor de a la función es continua?

b) Utilizando el valor de a del apartado anterior, esboza una gráfica de la función f.

c) Con el valor de a del apartado a), calcula el área encerrada por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta $x = 3$.
Nota: Si no has conseguido determinar a, toma $a = 3$ en los apartados b) y c).

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

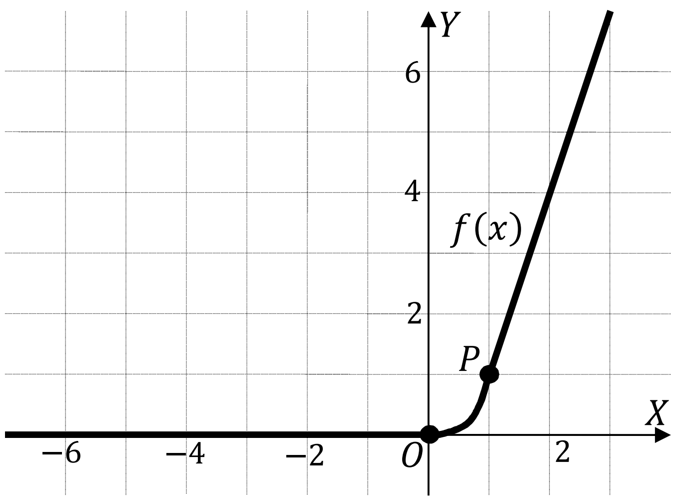
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (ax - 2) = a - 2 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = a - 2 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

b)

La función resulta ser $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \leq x < 1 \\ 3x - 2, 1 \leq x \end{cases}$.



La representación gráfica de la función se expresa en la figura adjunta; se ha tenido en cuenta que la función es continua en su dominio, que es R, que en el intervalo

$(-\infty, 0)$ la función es una recta horizontal; en el intervalo $[0, 1)$ es una parábola cóncava ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2 y en el intervalo $[1, +\infty)$ es una recta de pendiente tres.

$c)$

Todas las ordenadas de la función en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(0, 3)$, son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^3 (3x-2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - 0 + \left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - 2 \cdot 3\right) - \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{27}{2} - 6 - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{25}{3}\ u^2 \cong 8{,}33\ u^2.}$$

****

6º) La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

b) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad?

c) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo?

----

a)

La función $f(t) = -2t^2 + 16t$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$$f'(t) = -4t + 16 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

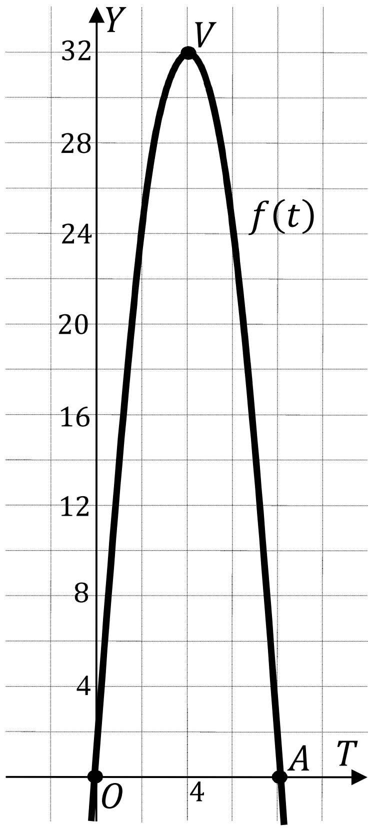
$$f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \Rightarrow V(4, 32).$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 + 16t = 0;\ \ t^2 - 8t = 0;$$

$$t(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ t_2 = 8 \rightarrow A(8,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la función $f(t)$ se expresa en la figura adjunta.



b)

$$\underline{La\ enfermedad\ duró\ 8\ días.}$$

c)

$$\underline{El\ enfermo\ está\ más\ grave\ al\ cuarto\ días\ del\ comienzo\ de\ la\ enfermedad.}$$

****

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

7º) El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

a) Si la media de usuarios fuese de 1.700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1.678?

b) En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido de 1.750, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de viajeros.

----

a)

$Datos$: $\mu = 1.700;\ \ \sigma = 108.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1.700;\ \frac{108}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1.700;\ \frac{108}{6}\right) = N(1.700;\ 18).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1.700}{18}$.

$$P = P(X > 1.678) = P\left(Z > \frac{1.678-1.700}{18}\right) = P\left(Z > \frac{-22}{18}\right) = P(Z > -1{,}22) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}22) = \underline{0{,}8888}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 1.750;\ \ \sigma = 108\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.750 - 1{,}96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}};\ 1.750 + 1{,}96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(1.750 - 1{,}96 \cdot 10{,}8;\ 1.750 + 1{,}96 \cdot 10{,}8);\ \ (1.750 - 21{,}168;\ 1.750 + 21{,}168)$$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (1.728{,}832;\ 1271{,}168)}.$$

****

8º) En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

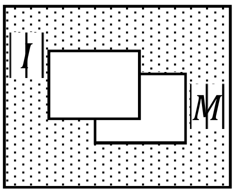
a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas?

c) ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés?

$$Datos: P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2};\ \ P(M) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3};\ \ P\left(\overline{I} \cap \overline{M}\right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

a)



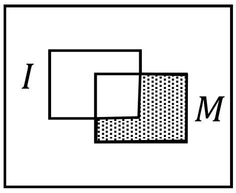
$$\Rightarrow P\left(\overline{I} \cap \overline{M}\right) = 1 - P(I \cup M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I \cup M) = 1 - P\left(\overline{I} \cap \overline{M}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(I \cup M) = P(I) + P(M) - P(I \cap M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I \cap M) = P(I) + P(M) - P(I \cup M) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{3+4-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$



$P\left(\overline{I} \cap M\right) = P(M) - P(I \cap M)$

$$P\left(\overline{I} \cap M\right) = P(M) - P(I \cap M) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

b)

De los 24 alumnos han aprobado las dos asignaturas 4. Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{24} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

c)

Dos sucesos $I\ y\ M$ son independientes cuando $P(I \cap M) = P(I) \cdot P(M)$:

$$P(I) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(I \cap M).$$

$$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ I\ y\ M\ son\ independientes.}$$

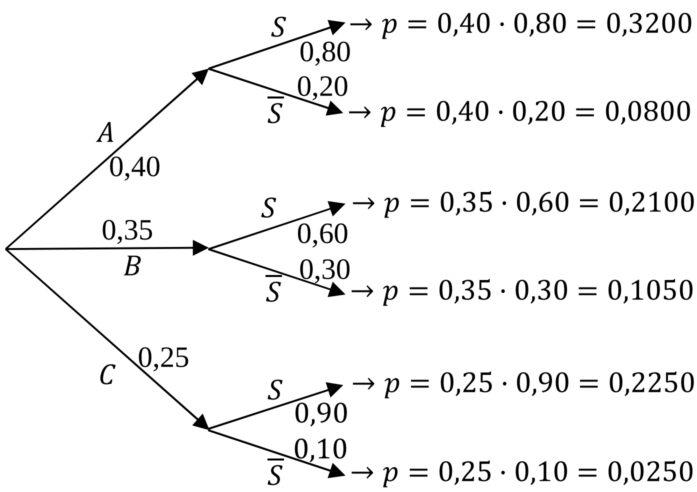
****

9º) Un hospital está especializado en el tratamiento de tres enfermedades A, B y C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es del 80 %, la de B el 60 % y de la C el 90 %.

a) José ingresa en el hospital (no sabemos cuál de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure?

b) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B?

c) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B?



a)

$$P = P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) =$$

$$= P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}80 + 0{,}35 \cdot 0{,}60 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}3200 + 0{,}2100 + 0{,}2250 = \underline{0{,}7550}.$$

b)

$$P = P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B) \cdot P(S/B)}{P(S)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}60}{0{,}755} = \frac{0{,}210}{0{,}755} = \underline{0{,}2781}.$$

c)

El suceso de Rosa es el contrario del suceso de Miguel, por lo tanto:

$$P = P\left(\overline{B}/S\right) = 1 - P\left(\frac{B}{S}\right) = 1 - 0{,}2781 = \underline{0{,}7219}.$$

****