# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

# JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B). No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

## OPCIÓN A

### Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

$a$) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

$b$) Determinar los extremos relativos de la función.

$c$) Calcula $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

----------

$a$)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0;\ \ 12x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 1)\ y\ (1, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, +\infty)$, el valor de la derivada es:

$$f'(2) = 12 \cdot 2 \cdot (4 + 2 - 2) = 96 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-2,0) \cup (1,+\infty),}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-2) \cup (0,1),}.$$

$b)$

De la continuidad de la función y los periodos de crecimiento se deducen los máximos y mínimos relativos de la función; no obstante se determinan por su estudio mediante derivadas.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24.$

$f''(-2) = 36 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) - 24 = 144 - 48 - 24 = 72 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = -2$.

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 - 32 = 48 - 32 - 48 - 32 =$

$= -64 \ \Rightarrow \ \underline{Mínimo: A(-2,-64)}.$

$f''(0) = -24 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 0$.

$f(0) = -32 \ \Rightarrow Máximo\ relativo: \underline{B(0,-32)}.$

$f''(1) = 36 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 24 = 36 + 24 - 24 = 36 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 1$.

$f(1) = 3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 32 = 3 + 4 - 12 - 32 = 7 - 44 =$

$= -37 \ \Rightarrow \ \underline{Mínimo: C(1,-37)}.$

$c)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^4+4x^3-12x^2-32}{x-2} = \frac{3\cdot 2^4+4\cdot 2^3-12\cdot 2^2-32}{2-2} = \frac{48+32-48-32}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

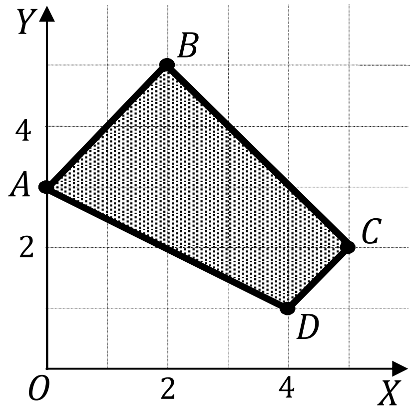
$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{12x^3+12x^2-24x}{1} = 12 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 =$$

$$= 12 \cdot 2 \cdot (2^2 + 2 - 2) = 24 \cdot 4 = 96.$$

$$\underline{\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 96.}$$

**********

2º) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.




$a$) Determina el citado conjunto de restricciones.

$b$) Maximiza la función $f(x,y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

----------

$a$)

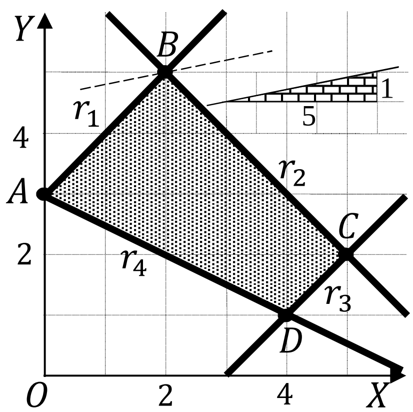
La recta que pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B(2,5)$ es: $\frac{y-5}{3-5} = \frac{x-2}{0-2}$; $\frac{y-5}{-2} = \frac{x-2}{-2}$; $y - 5 = x - 2 \Rightarrow r_1 \equiv x - y = -3$.

La recta que pasa por los puntos $B(2,5)$ y $C(5,2)$ es: $\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-5}{2-5}$; $\frac{y-2}{3} = \frac{x-5}{-3}$; $-y + 2 = x - 5 \Rightarrow r_2 \equiv x + y = 7$.

La recta que pasa por los puntos $C(5,2)$ y $D(4,1)$ es: $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-4}{5-4}$; $\frac{y-1}{1} = \frac{x-4}{1}$; $y - 1 = x - 4 \Rightarrow r_3 \equiv x - y = 3$.

La recta que pasa por los puntos $D(4,1)$ y $A(0,3)$ es: $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-0}{4-0}$; $\frac{y-3}{-2} = \frac{x}{4}$; $2y - 6 = -x \Rightarrow r_4 \equiv x + 2y = 6$.

Teniendo en cuenta que las rectas $r_1$, $r_2$ y $r_3$ contienen al origen de coordenadas considerando la zona factible y que la recta $r_4$ no lo contiene, las inecuaciones que denotan la zona factible son:




$$\left.\begin{array}{r} x - y \leq -3 \\ x + y \leq 7 \\ x - y \leq 3 \\ x + 2y \geq 6 \end{array}\right\}.$$

$b$)

La función a maximizar es $f(x,y) = -x + 5y + 12$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,3) = -0 + 5 \cdot 3 + 12 = 0 + 15 + 12 = 27.$

$B \Rightarrow f(2,5) = -2 + 5 \cdot 5 + 12 = -2 + 25 + 12 = 35.$

$C \Rightarrow f(5,2) = -5 + 5 \cdot 2 + 12 = -5 + 10 + 12 = 17.$

$D \Rightarrow f(4,1) = -4 + 5 \cdot 1 + 12 = -4 + 5 + 12 = 13.$

El máximo se produce en el punto $B(2,5)$.

También se hubiera obtenido el punto $B$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = -x + 5y + 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{12}{5} \Rightarrow m = \frac{1}{5}.$

$\underline{El\ punto\ que\ maximiza\ la\ función\ dada\ es\ B(2,5)}.$

**********

3º) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención de cirugía vascular sigue una distribución normal con desviación típica de 15 días.

$a$) Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85 % para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

$b$) Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a $(41, 45)$ como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 85 % es:

$1-\alpha=0{,}85\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}85=0{,}15\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}075}=1{,}44.$
$1-0{,}075=0{,}9250\ \rightarrow z=1{,}44).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=43;\ \sigma=15;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}44.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(43-1{,}44\cdot\frac{15}{\sqrt{100}};\ 43+1{,}44\cdot\frac{15}{\sqrt{100}}\right);$

$(43-1{,}44\cdot 1{,}5;\ 43+1{,}44\cdot 1{,}5);\ \ (43-2{,}16;\ 43+2{,}16).$

$$\underline{I.C._{85\ \%}=(40{,}84;\ 45{,}16).}$$

$b$)

$E=\frac{45-41}{2}=\frac{4}{2}=2.$ Datos: $n=100;\ \sigma=115;\ E=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{2\cdot\sqrt{100}}{15}=\frac{20}{15}=1{,}3333.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0, 1)$ a 1,33 le corresponde el valor de 0,9082, por lo cual:

$\frac{\alpha}{2}=1-0{,}9082;\ \alpha=2-1{,}8164=0{,}1836\Rightarrow 1-\alpha=0{,}8164.$

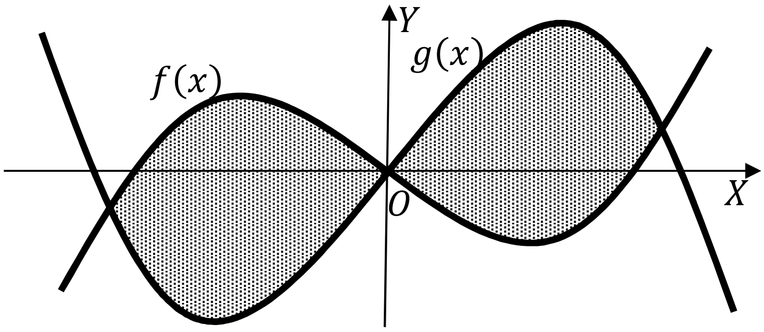
$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 81{,}64\ \%.}$$

**********

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Consideramos las funciones $f(x) = x(x^2 - 3)$ y $g(x) = -x(x^2 - 3)$.




$a$) Determinar el área de la región limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Dicha región aparece sombreada en la figura adjunta.

$b$) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 9x + 2.018$? Determina la recta tangente en los puntos indicados.

----------

$a$)

Los puntos de corte de ambas funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x(x^2 - 3) = -x(x^2 - 3);\;\; x(x^2 - 3) + x(x^2 - 3) = 0;$$

$$2x(x^2 - 3) = 0;\;\; x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Los puntos de corte, además del origen, son $A\left(-\sqrt{3}, 0\right)\ y\ B\left(0, \sqrt{3}\right)$. (El esquema que se nos da no es correcto, aunque no dificulta el cálculo del área pedida).

Ambas funciones son simétricas con respecto al origen, por ser $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} [-x(x^2 - 3) - x(x^2 - 3)] \cdot dx =$$

$$= -4 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} [x(x^2 - 3)] \cdot dx = 4 \cdot \int_{\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) \cdot dx = 4 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{\sqrt{3}}^0 =$$

$$= 0 - 4 \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4} - \frac{3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{2}\right] = -4 \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) = -9 + 18 = 9.$$

$$\underline{S = 9\, u^2}.$$

$b$)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = 9x + 2.018$ es $m = 9$.

$f(x) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x.$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 3.$

$f'(x) = 9 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 9;\ \ 3x^2 = 12;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$

$f(2) = 2 \cdot (2^2 - 3) = 2.$ Por simétrica con respecto al origen: $f(-2) = -2.$

$\underline{Los\ puntos\ de\ tangencia\ son\ P(-2, -2)\ y\ Q(2, 2)}.$

**********

5º) Consideramos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2(a-1)x - y + 2z = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + y + 2(a+1)z = 4 \end{cases}$, donde $a$ es un parámetro real.

$a$) ¿Para qué valores del parámetro $a$ el sistema es compatible y determinado?

$b$) Resuelve el sistema para $a = 0$. ¿Es posible resolver el sistema para $a = 1$?

----------

$a$)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} -2a+2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} -2a+2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2a+2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} -2a+2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = a(4a^2 - 4) + 2 - 2 - 4a + 2a - 2 +$$

$$+2a + 2 = 4a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$b$)

Para $a = 0$ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 + C_2 = C_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

El sistema resulta $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (tercera) y se hace $z = \lambda \Rightarrow x = 2 - \lambda$.

$$2x - y + 2z = 4 \Rightarrow y = 2x + 2\lambda - 4 = 4 - 2\lambda + 2\lambda - 4 = 0.$$

$$\underline{Solución: x = 2 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

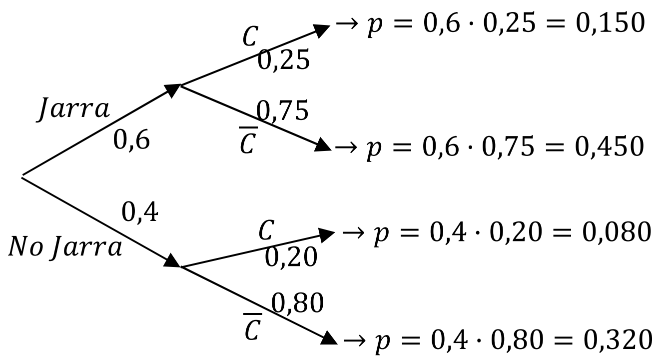
**********

6º) Durante las fiestas de San Bernabé del pasado año, seis de cada diez personas que acudieron a la degustación del pan, el pez y el vino adquirieron la tradicional jarra de barro para tomar vino. Una de cada cuatro personas que adquirió la jarra no consumió vino y cuatro de cada cinco personas que no la compraron tampoco lo tomaron.

$a$) Calcula el porcentaje de personas que bebieron vino en la degustación.

$b$) Un amigo mío no tomó vino el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que mi amigo comprase la jarra?

----------




$a$)

$$P = P(C) = P(J) \cdot P(C/J) + P(\overline{J}) \cdot P(C/\overline{J}) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}20 =$$

$$= 0{,}150 + 0{,}080 = \underline{0{,}230}.$$

$b$)

$$P = P(\overline{C}/J) = \frac{P(J \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(J) \cdot P(\overline{C}/J)}{1 - P(C)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}23} = \frac{0{,}45}{0{,}77} = \underline{0{,}5844}.$$

**********

OPCIÓN B

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

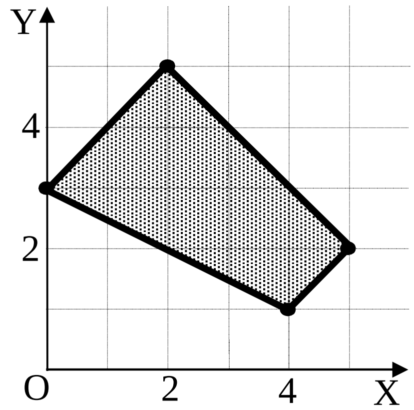
1º) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

$a$) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

$b$) Determinar los extremos relativos de la función.

$c$) Calcula $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

2º) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.




$a$) Determina el citado conjunto de restricciones.

$b$) Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

3º) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención de cirugía vascular sigue una distribución normal con desviación típica de 15 días.

$a$) Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85 % para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

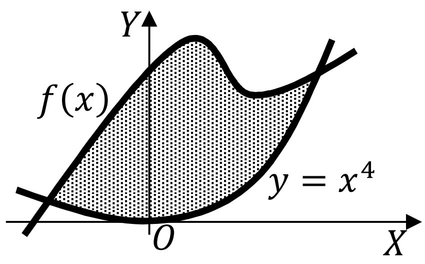
$b$) Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a $(41, 45)$ como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$.




$a$) ¿En qué puntos la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 2.018$?

$b$) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ $e$ $y = x^4$. (La región cuya área se solicita aparece representada en la figura adjunta).

----------

$a$)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = x + 2.018$ es $m = 1$.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1.$ $\qquad$ $f'(x) = 4x^3 - 4x + 1.$

$f'(x) = 1 \Rightarrow 4x^3 - 4x + 1 = 1;\;\; 4x^3 - 4x = 0;\;\; 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 2 - 1 + 1 = -1 \Rightarrow A(-1, -1).$

$f(0) = 1 \Rightarrow B(0, 1).$

$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow C(1, 1).$

$\underline{Los\ puntos\ de\ tangencia\ son\ A(-1, -1), B(0, 1)\ y\ C(1, 1)}.$

$b$)

Los puntos de corte de las funciones $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$ $e$ $y = x^4$ tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow x^4 - 2x^2 + x + 1 = x^4;\;\; -2x^2 + x + 1 = 0;\;\; 2x^2 - x - 1 = 0;$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1.$

La superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - y] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [(x^4 - 2x^2 + x + 1) - x^4] \cdot dx =$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (-2x^2 + x + 1) \cdot dx = \left[ -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left( -\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left[ -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{-16+48-1-3}{24} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$$

$$\underline{S = \frac{7}{6}\, u^2 \cong 1{,}1667\, u^2.}$$

**********

5º) Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3a-7 & -6 \\ 6 & 3a+6 \end{pmatrix}$.

$a$) Determinar los valores de $a$ para los que existe la matriz inversa $A^{-1}$.

$b$) Tomando $a = 1/3$, determinar una matriz $X$ tal que $A \cdot X + 6I_2 = A^3 + A \cdot A^t$.
(Nota: $A^t$ indica la matriz traspuesta de $A$ e $I_2$ la matriz identidad de orden dos).

----------

$a$)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a-7 & -6 \\ 6 & 3a+6 \end{vmatrix} = (3a-7)(3a+6) + 36 =$$

$$= 9a^2 + 18a - 21a - 42 + 36 = 9a^2 - 3a - 6 = 0;\ \ 3a^2 - a - 2 = 0;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}}.$$

$b$)

Para $a = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X + 6I_2 = A^3 + A \cdot A^t;\ \ A \cdot X = A^3 + A \cdot A^t - 6I_2;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^3 + A \cdot A^t - 6I_2) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^3 + A \cdot A^t - 6I_2)}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 36 = -6. \quad A^t = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 + A \cdot A^t - 6I_2 = A \cdot (A^2 + A^t) - 6I_2 =$$

$$= A \cdot \left[\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + A^t - 6I_2\right] =$$

$$= A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A^3 + A \cdot A^t - 6I_2) = A^{-1} \cdot A = I.$$

$$\underline{X = I}.$$

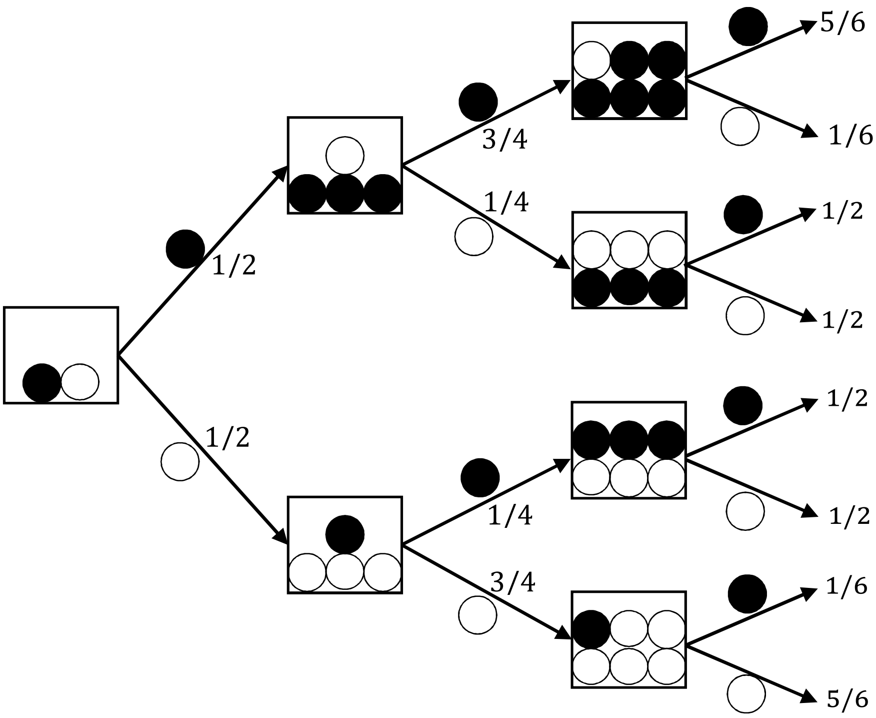
**********

6º) En una caja tenemos inicialmente una bola negra y otra blanca. Cada vez que extraemos una bola, introducimos tres bolas del color de la extraída. Sacamos una primera bola y procedemos a hacer la reposición, sacamos una segunda bola y reponemos y sacamos una tercera bola.

$a$) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacada bolas del mismo color.

$b$) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado dos bolas del mismo color y otra de color distinto?

----------




$a$)

$$P = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \underline{\frac{5}{8} = 0{,}625.}$$

$b$)

$$P = P(NNB) + P(NBN) + P(NBB) + P(BBN) + P(BNB) + P(BNN) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= \underline{\frac{3}{8} = 0{,}375.}$$

**********