PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Mi amigo Diego dice que la función $f(x) = \begin{cases} -2ax^2 + 4bx + 1 & si\ x > 1 \\ ax + b & si\ 1 \geq x \geq -1 \\ 2ax^2 + 2bx - 1 & si\ x < -1 \end{cases}$, con a y b números reales, no es continua para ninguna pareja de valores a y b. Yo le he dicho que no tiene razón y que es continua para infinitas parejas de valores de a y b. ¿Quién de los dos tiene razón? Argumenta tu respuesta.

La función f(x) es continua en $R \forall a, b$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea continua en los puntos críticos $x = -1$ y $x = 1$.

Para que una función sea continua en un puntos es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2ax^2 + 2bx - 1) = 2a - 2\mathrm{b} - 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (ax + b) = -a + b = f(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a - 2b - 1 = -a + b;\ \ \boldsymbol{3a - 3b = 1}.$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax + b) = a + b = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-2ax^2 + 4bx + 1) = -2a + 4b + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a + b = -2a + 4b + 1;\ \ \boldsymbol{3a - 3b = 1}.$ (2)

La igualdad de las expresiones (1) y (2) indica que el "sistema" que forman tiene infinitas soluciones.

Lo anterior demuestra que:

$$\underline{Mi\ amigo\ Diego\ no\ tiene\ razón, tengo\ razón\ yo}.$$

****

2ª) Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, calcula las matrices $A - I_2 - 2A^{-1}$ y $(A - 2A^{-1})^{2016}$. Nota: I_2 denota la matriz identidad de orden dos y A^{-1} la matriz inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \qquad |A| = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 18 = -2. \qquad A^t = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.\ de\ A^t = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A - I_2 - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A - I_2 - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$A - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{(A - 2A^{-1})^{2016} = I^{2016} = I}$$

****

3ª) Se sabe que la edad de los trabajadores de las fábricas de calzado de la zona de Arnedo sigue una distribución normal de desviación típica 10. Con una muestra de trabajadores elegida al azar se ha obtenido una media de 42 años. Si el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad es $(39'25, 44'75)$, ¿cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada? (Véase la Tabla simplificada para la normal tipificada al final del examen)

Conocemos: El intervalo de confianza del cual obtenemos el error:

$E = 42 - 39{,}25 = 2{,}75.$ Desviación típica: $\sigma = 10.$

Para un nivel de confianza del 90 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

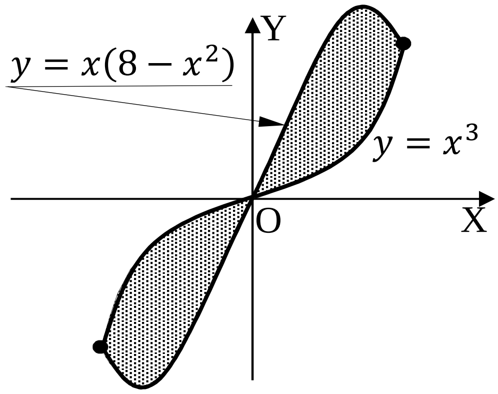
$1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$
$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \cdot 10}{2{,}75}\right)^2 = 5{,}98^2 = 35{,}78.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ 36\ trabajadores.}$

****

4ª) Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x(8 - x^2)$. En la figura adjunta se muestra sombreada la región cuya área se solicita.



Las dos curvas son funciones impares, o sea, que son simétricas con respecto al origen de coordenadas.

Los puntos de corte de ambas curvas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = x(8 - x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 = x(8 - x^2);\;\; x^3 = 8x - 8x^3;\;\; 9x^3 - 8x = 0;$$

$$x(9x^2 - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{O(0,0)};\;\; 9x^2 - 8 = 0;\;\; 9x^2 = 8;\;\; x^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{A\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)} \\ x_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{B\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{16\sqrt{2}}{27}\right)} \end{cases}.$$

Considerando la simetría de las curvas y teniendo en cuenta que en el intervalo $\left(0, \frac{16\sqrt{2}}{27}\right)$ las ordenadas de la curva $y = x(8 - x^2)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = x^3$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} [x(8 - x^2) - x^3] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} (8x - x^3 - x^3) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} (8x - 2x^3) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2 \cdot \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} =$$

$$= 2 \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^4}{2}\right] = 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{8}{9} - \frac{64}{2 \cdot 81}\right) = 2 \cdot \frac{32}{9} \cdot \left(1 - \frac{2}{18}\right) = \frac{64}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{64}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{512}{81}.$$

$$\underline{S = \frac{512}{81}\, u^2 \cong 6{,}32\, u^2.}$$

****

5ª) Para la próxima temporada de otoño-invierno, el programador del Teatro Timorato debe seleccionar tres espectáculos de entre dieciséis propuestas que ha recibido y, puesto que le gustan todas, ha decidido hacer la selección por sorteo. Como estamos en el año de Cervantes, entre las propuestas recibidas hay seis inspiradas o basadas en textos de dicho autor. ¿Qué probabilidad tiene de programar al menos un espectáculo cervantino?

El suceso contrario a elegir al menos un espectáculo cervantino es no elegir ningún espectáculo cervantino.

La probabilidad de elegir de entre los tres espectáculos al menos uno cervantino es equivalente a la unidad menos la probabilidad de no elegir ningún espectáculo cervantino:

$$P = 1 - \frac{C_{10,3}}{C_{16,3}} = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{16}{3}} = 1 - \frac{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}}{\frac{16!}{(16-3)!\cdot 3!}} = 1 - \frac{\frac{10!}{7!}}{\frac{16!}{13!}} = 1 - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{16\cdot 15\cdot 14} = 1 - \frac{5\cdot 3\cdot 4}{8\cdot 5\cdot 7} =$$

$$= 1 - \frac{3\cdot 1}{2\cdot 7} = 1 - \frac{3}{14} = \frac{14-3}{14} = \frac{11}{14}.$$

$$\underline{P = \frac{11}{14}}.$$

****

Resuelve los dos problemas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(1+a)x+(2-a)y+z=2\\ 2ax+y+z=2\\ (1-a)x+(1-a)y+z=3\end{cases}$:

a) Determinar los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible indeterminado?, ¿e incompatible?

c) Resolver el sistema para $a=1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1+a & 2-a & 1\\ 2a & 1 & 1\\ 1-a & 1-a & 1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1+a & 2-a & 1 & 2\\ 2a & 1 & 1 & 2\\ 1-a & 1-a & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}1+a & 2-a & 1\\ 2a & 1 & 1\\ 1-a & 1-a & 1\end{vmatrix}=$$

$$1+a+2a(1-a)+(2-a)(1-a)-(1-a)-(1-a)(1+a)-2a(2-a)=$$

$$=1+a+2a-2a^2+2-2a-a+a^2-1+a-(1-a^2)-4a+2a^2=$$

$$=2+a^2-3a-1+a^2=2a^2-3a+1=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{a_1=\frac{1}{2}, a_2=1}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ \begin{Bmatrix}a\neq ½\\ a\neq 1\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ para\ a=½\ y\ para\ a=1}.$

b)

Para α = ½ es $M'=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(9+4+2-2-6-6) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$Para\ a = ½ \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

Para α = 1 es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a = 1}.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ para\ a = ½.}$$

$c)$

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado, según se ha visto en el apartado anterior.

$$\underline{Solución\colon \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=3 \end{cases},\forall\lambda \in R.}$$

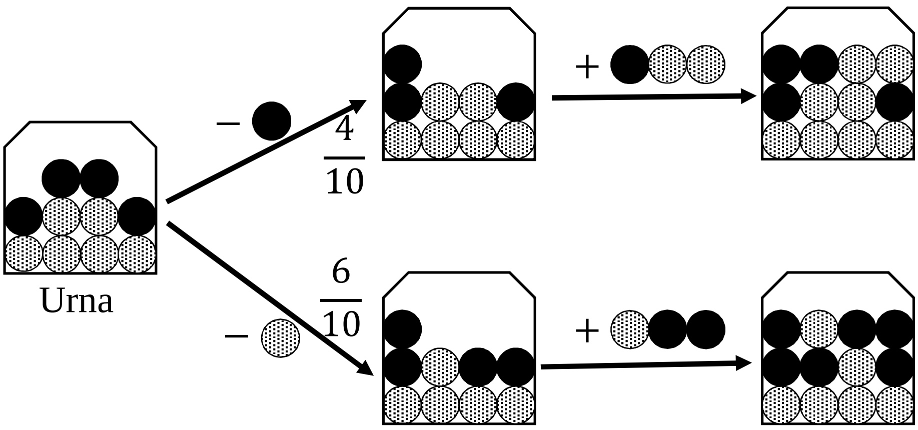
****

2º) Una urna contiene seis bolas rojas y cuatro negras. Se extrae una de ellas al azar y se introducen en la urna una bola del color de la extraída y dos del otro color. Tras la reposición, se extrae una segunda bola.

a) Calcula la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción.

b) Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

c) Si en la segunda extracción hemos sacado una bola roja, calcula la probabilidad de que en la primera también lo haya sido.



a)

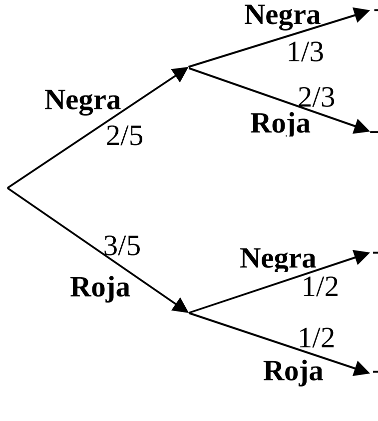
$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{15}}.$$

b)

$$P = P(RN) + P(NR) = \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{11}\right) + \frac{8}{12} \cdot \left(\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{11}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11}\right)\left(\frac{4}{10} + \frac{8}{12}\right) = \left(\frac{8}{33} + \frac{7}{33}\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{33} \cdot \frac{6+10}{15} = \frac{5}{11} \cdot \frac{16}{15} = \underline{\frac{16}{33}}.$$

c)



$\rightarrow p = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

$\rightarrow p = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

$\rightarrow p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$\rightarrow p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$$P = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{16+18}{60}} = \frac{4\cdot 60}{15\cdot 34} = \frac{4\cdot 4}{1\cdot 34} = \underline{\frac{8}{34}}.$$

****

OPCIÓN B

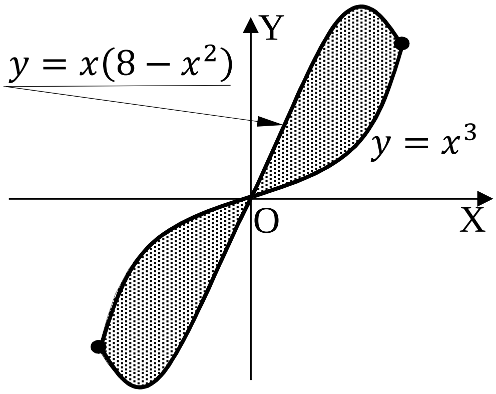
Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Mi amigo Diego dice que la función $f(x) = \begin{cases} -2ax^2 + 4bx + 1 & si\ x > 1 \\ ax + b & si\ 1 \geq x \geq -1 \\ 2ax^2 + 2bx - 1 & si\ x < -1 \end{cases}$, con a y b números reales, no es continua para ninguna pareja de valores a y b. Yo le he dicho que no tiene razón y que es continua para infinitas parejas de valores de a y b. ¿Quién de los dos tiene razón? Argumenta tu respuesta.

2ª) Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, calcula las matrices $A - I_2 - 2A^{-1}$ y $(A - 2A^{-1})^{2016}$. Nota: I_2 denota la matriz identidad de orden dos y A^{-1} la matriz inversa de A.

3ª) Se sabe que la edad de los trabajadores de las fábricas de calzado de la zona de Arnedo sigue una distribución normal de desviación típica 10. Con una muestra de trabajadores elegida al azar se ha obtenido una media de 42 años. Si el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad es $(39'25, 44'75)$, ¿cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada? (Véase la Tabla simplificada para la normal tipificada al final del examen)

4ª) Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x(8 - x^2)$. En la figura adjunta se muestra sombreada la región cuya área se solicita.



5ª) Para la próxima temporada de otoño-invierno, el programador del Teatro Timorato debe seleccionar tres espectáculos de entre dieciséis propuestas que ha recibido y, puesto que le gustan todas, ha decidido hacer la selección por sorteo. Como estamos en el año de Cervantes, entre las propuestas recibidas hay seis inspiradas o basadas en textos de dicho autor. ¿Qué probabilidad tiene de programar al menos un espectáculo cervantino?

****

(Resueltos en la opción A anterior)

Resuelve los dos problemas que se plantean a continuación.

1º) Sea la función $f(x)=\frac{-x}{x^2+b}$, donde supondremos que b es un valor real no nulo.

a) Determinar b si la recta tangente a la función dada en x = 1 es paralela a la recta $y=x+6.102$.

b) Para b = 2, calcular $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}+x-2\right]$.

c) Para b = 4, estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determinar sus extremos relativos.

----

a)

La pendiente de la tangente $y=x+6.102$ es $m=1$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(x^2+b)+x\cdot 2x}{(x^2+b)^2}=\frac{-x^2-b+2x^2}{(x^2+b)^2}=\frac{x^2-b}{(x^2+b)^2}.$$

$$f'(1)=m=1\Rightarrow\frac{1^2-b}{(1^2+b)^2}=\frac{1-b}{(1+b)^2}=1;\;\;1-b=1+2b+b^2;\;\;b^2+3b=0;$$

$$b(b+3)=0\Rightarrow b_1=0, b_2=-3.$$

$$\underline{Cumplen\ lo\ pedido\ los\ valores\ b=0\ y\ b=-3.}$$

b)

Para b = 2 es $f(x)=\frac{-x}{x^2+2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}+x-2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{-x}{x^2+2}}+x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2+2}{x}+x-2\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-2+x^2-2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{x}=-\,2.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}+x-2\right]=-2.}$$

c)

Para b = 4 es $f(x)=\frac{-x}{x^2+4}$ y $f'(x)=\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-4}{(x^2+4)^2} = 0;\;\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en R por ser una función racional cuyo denominador es distinto de cero para cualquier valor real de x, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $f'(0) = -\frac{4}{16} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-2,2)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2+4)-(x^2-4)\cdot 2\cdot(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{2x-4x\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^3} = \frac{2x-4x^3+16x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(9-2x^2)}{(x^2+4)^3}.$$

$f''(-2) = \frac{-4\cdot(9-8)}{(4+4)^3} = \frac{-4}{8^3} < 0 \;\Rightarrow$ **Máximo relativo para x = -2**.

$$f(-2) = \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; Máximo\ relativo: \underline{A\left(-2, \frac{1}{4}\right)}.$$

$f''(2) = \frac{4\cdot(9-8)}{(4+4)^3} = \frac{4}{8^3} > 0 \;\Rightarrow$ **Mínimo relativo para x = 2**.

$$f(2) = \frac{x^2-4}{(2^2+4)^2} = \frac{4-4}{8^2} = \frac{0}{8^2} = 0 \;\Rightarrow\; Mínimo\ relativo: \underline{B(2, 0)}.$$

****

2º) En un colegio de educación infantil deben solicitar la ayuda de las madres y los padres de los niños para realizar una actividad en el centro. Los profesores tienen una serie de necesidades y se han impuesto las siguientes limitaciones:

1.- El número de padres debe ser igual o mayor que el de madres.

2.- La diferencia entre el número de padres y el doble del número de madres debe ser menor o igual que cuatro.

3.- El número total de madres y padres debe ser al menos cuatro pero no exceder de 10.

Echa una mano a los profesores y resuelve las siguientes cuestiones:

a) Plantea el conjunto de restricciones del problema.

b) Dibuja la región factible asociada con las restricciones anteriores.

c) Si las madres pueden dedicar, de media, cuatro horas a la actividad y los padres tres, ¿cuál debe ser la distribución de padres y madres por la que deben optar los profesores para maximizar el tiempo dedicado por las familias a la actividad?

----

a)

Sean x e y el número de padres y madres del colegio, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq y \\ x - 2y \leq 4 \\ 4 \leq x \leq 10 \\ 4 \leq y \leq 10 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 4 \\ 4 \leq x \leq 10 \\ 4 \leq y \leq 10 \end{array}\right\}}.$$

b)

① $\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow$

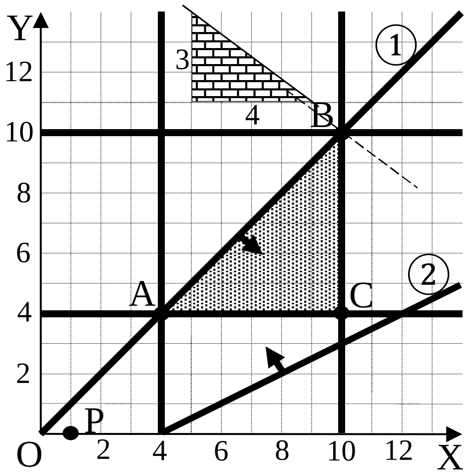
$\Rightarrow P(1,0) \rightarrow Si \;\Rightarrow$

x	0	10
y	0	10

② $\Rightarrow x - 2y \leq 4 \Rightarrow$

x	4	10
y	0	3

$\Rightarrow y \leq \frac{x-4}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$



La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

$c)$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(4, 4).$ $\quad$ $B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(10, 10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(10, 4).$

La función de objetivos es: $f(x, y) = 3x + 4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(4, 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28.$

$B \Rightarrow f(10, 10) = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 30 + 40 = \mathbf{70}.$

$C \Rightarrow f(10, 4) = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 4 = 30 + 16 = 46.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 3x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}.$

$\underline{Los\ más\ conveniente\ es\ que\ \ padres\ y\ madres\ dediquen\ 10\ horas\ semanales.}$

****