PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^2+1+1+a-a-1=0;\ \ 1-a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z=-\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=4-\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=5-2\lambda;\ \ y=\tfrac{5}{2}-\lambda.$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-4+\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=-3;\ \ x=-\tfrac{3}{2}.$$

$$\underline{Solución: x=-\tfrac{3}{2};\ \ y=\tfrac{5}{2}-\lambda;\ \ z=\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

$c)$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+4+1+4-1-3=2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

2º) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Queda\ comprobado\ que\ A\ tiene\ inversa.}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{1}\ \Rightarrow\ \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}}.$$

b)

$$A\cdot X-B=C^t;\ \ A\cdot X=C^t+B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C^t+B);$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(C^t+B)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(C^t+B)}.$$

$$C^t+B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(C^t+B)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}}.$$

****

3º) En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior o superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por la expresión $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) Si el volumen de la lata es $90\pi\ cm^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

----

a)

La superficie de las bases en cm^2 es: $S_{Bases} = 2 \cdot \pi \cdot x^2$.

La superficie lateral en cm^2 es: $S_{Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y$.

$$Coste = 5 \cdot S_{Bases} + 3 \cdot S_{Lateral} = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{Coste = 10 \cdot \pi \cdot x^2 + 6 \cdot \pi \cdot x \cdot y}$, como se tenía que demostrar.

b)

$$V = S_{Base} \times Altura = \pi \cdot x^2 \cdot y = 90 \cdot \pi \Rightarrow y = \frac{90}{x^2}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión del coste, resulta:

$$Coste = C(x) = 10 \cdot \pi \cdot x^2 + 6 \cdot \pi \cdot x \cdot \frac{90}{x^2} = \frac{10 \cdot \pi \cdot x^3 + 540 \cdot \pi}{x} = 10\pi \cdot \frac{x^3 + 54}{x}.$$

La condición necesaria para que el coste sea mínimo es que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 10\pi \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 54) \cdot 1}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{3x^3 - x^3 - 54}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 20\pi \cdot \frac{x^3 - 27}{x^2}.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 20\pi \cdot \frac{x^3 - 27}{x^2} = 0;\ \ x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$y = \frac{90}{x^2} = \frac{90}{3^2} = \frac{90}{9} = 10.$$

$$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ con\ radio\ de\ 3\ cm\ y\ altura\ de\ 10\ cm.}$$

Justificación de que se trata de un máximo.

La segunda derivada del coste tiene que ser negativa para $x = 3$:

$$C''(x) = 20\pi \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 27) \cdot 2x}{x^4} = 20\pi \cdot \frac{3x^3 - 2x^3 + 54}{x^3} = 20\pi \cdot \frac{2x^3 + 54}{x^3} =$$

$$= 40\pi \cdot \frac{x^3 + 27}{x^3}.$$

$$C''(3) = 40\pi \cdot \frac{3^3 + 27}{3^3} = 80\pi > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo, c.q.j.}$$

****

4º) En este ejercicio las cuestiones $a)$ y $b)$ son totalmente independientes.

$a)$ Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

$b)$ Calcule la integral indefinida: $I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\cdot ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty+\infty}=\frac{1}{\infty}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0}.$$

$b)$

$$I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx\\ x^2\cdot dx=dv\to v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow Lx\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\int x^2\cdot dx=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\underline{\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C}.$$

$$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C.$$

Por contener $F(x)$ al punto $P(1,0)$ es $F(1)=0$:

$$F(1)=\frac{1^3}{9}\cdot(3\cdot L1-1)+C=0;\ \ \frac{1}{9}\cdot(3\cdot 0-1)+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{9}.$$

$$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ \underline{F(x)=\frac{1}{9}\cdot\left[x^3(3Lx-1)+1\right]}.$$

****

5º) Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$.

a) Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

b) Compruebe que el punto $A(3, 2, 1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

----

a)

Dos planos son secantes (se cortan en una recta) cuando sus vectores directores son linealmente independientes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, con lo cual, $\underline{\textit{está comprobado que los planos } \pi_1 \ y \ \pi_1 \textit{ se cortan}}$.

La recta r que determinan los planos π_1 y π_2, expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x - y = -\lambda \\ x + y = 2 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 2; \;\; x = 1.$$

$$1 - y = -\lambda; \;\; y = 1 + \lambda \;\Rightarrow\; \underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

b)

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ A(3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{A \notin \pi_1}.$$

$$\left. \begin{array}{r} \pi_2 \equiv x + y - z = 2 \\ A(3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 2 - 1 \neq 2 \Rightarrow \underline{A \notin \pi_2}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1)$.

Los puntos $P(1, 1, 0)$ y $A(3, 2, 1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = [(3, 2, 1) - (1, 1, 0)] = (2, 1, 1).$$

$$\pi_3\left(A; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z - 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-3)+2(y-2)-2(z-1)-(x-3)=0$; $2(y-2)-2(z-1)=0$;

$(y-2)-(z-1)=0$; $y-2-z+1=0 \Rightarrow \underline{\pi_3 \equiv y-z-1=0}$.

****

6º) En este ejercicio las cuestiones $a)$ y $b)$ son totalmente independientes. Considere los puntos $A(a, 4, 3), B(0, 0, 5)$ y $C(0, 3, -1)$.

$a)$ Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

$b)$ Tomando el valor de $a = 3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

$a)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, 5) - (a, 4, 3)] = (-a, -4, 2).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 3, -1) - (a, 4, 3)] = (-a, -1, -4).$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (-a, -4, 2) \cdot (-a, -1, -4) = 0;\ \ a^2 + 4 - 8 = 0;$$

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$$

$$\underline{El\ triángulo\ \widehat{ABC}\ es\ rectángulo\ en\ A\ para\ a = -2\ y\ a = 2.}$$

$b)$

Para $a = 3 \Rightarrow A(3, 4, 3)$ y $\overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2)$.

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{v'_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + k + 2k - i = -i + 2j + 3k \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1, -2, -3).$$

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y - 4 & z - 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-4(x - 3) + 9(y - 4) - 4(z - 3) - 6(z - 3) - 12(x - 3) - 2(y - 4) = 0;$$

$$-16(x - 3) + 7(y - 4) - 10(z - 3) = 0;\ 16(x - 3) - 7(y - 4) + 10(z - 3) = 0;$$

$$16x - 48 - 7y + 28 + 10z - 30 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 16x - 7y + 10z - 50 = 0.}$$

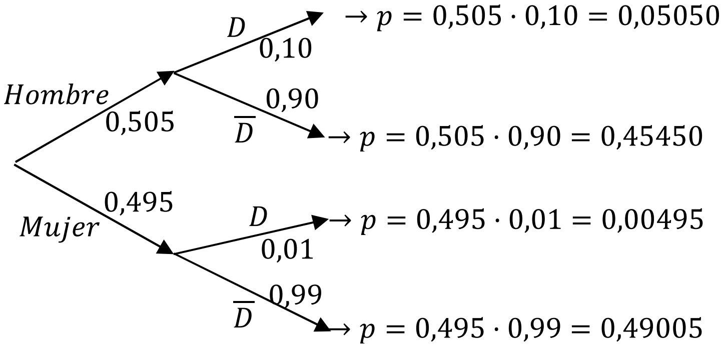
****

7º) Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?



a)

$$P = P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = P(H) \cdot P(D/H) + P(M) \cdot P(D/M) =$$

$$= 0{,}505 \cdot 0{,}10 + 0{,}495 \cdot 0{,}01 = 0{,}05050 + 0{,}00495 = \underline{0{,}05545}.$$

b)

$$P = P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{0{,}05545} = \frac{0{,}495 \cdot 0{,}01}{0{,}05545} = \frac{0{,}00495}{0{,}05545} = \underline{0{,}08927}.$$

c)

Dos sucesos D y M son independientes cuando $P(D \cap M) = P(D) \cdot P(M)$:

$$P(D) \cdot P(M) = 0{,}05545 \cdot 0{,}495 = 0{,}02745 \neq 0{,}00495 = P(D \cap M).$$

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes.}}$

****

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) Calcule la media de esta distribución.

b) ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h. ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

----

a)

$Datos$: $\sigma = 10$; $P(X \leq 130) = 69{,}15\ \% = 0{,}6915$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{10}$.

$$P = P\left(Z \leq \frac{X-\mu}{10}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{130-\mu}{10}\right) = 0{,}6915.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a $0{,}6915$ le corresponde el valor $0{,}500$, por lo cual:

$$\frac{130-\mu}{10} = 0{,}5;\ \ 130 - \mu = 5 \Rightarrow \underline{\mu = 125\ km/h}.$$

b)

Conociendo la media $\mu = 125\ km/h$:

$$P = P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120-125}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{-5}{10}\right) = P(Z \leq -0{,}5) =$$

$$= P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \underline{0{,}3085}.$$

c)

$$P = P(120 \leq X \leq 150) = P\left(\frac{120-125}{10} \leq Z \leq \frac{150-125}{10}\right) = P\left(\frac{-5}{10} \leq Z \leq \frac{25}{10}\right) =$$

$$= P(-0{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - [1 - P(Z \leq 0{,}5)] =$$

$$= P(Z \leq 2{,}5) - 1 + P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}9938 - 1 + 0{,}6915 = 1{,}6853 - 1 =$$

$$= \underline{0{,}6853}.$$

****