

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE MURCIA****JUNIO – 2012****MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

**OPCIÓN A**

1º) a ) Discuta el sistema de ecuaciones 
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + ay + a^2z = -1 \\ ax + a^2y + a^3z = 2 \end{array} \right\} \text{ en función del parámetro } \alpha.$$

b ) Resuelva el sistema cuando sea compatible.

-----

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a^2 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de M y M' en función del parámetro  $\alpha$  son los siguientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dos filas iguales)} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M \leq 2, \forall a \in \mathbb{R}}$$

Vamos a estudiar ahora el rango de M'.

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 2a^2 - a - 2a^2 + a^2 - 2 = a^2 + a - 2 = 0 \;; \; a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -2} \;; \; \underline{x_2 = 1}.$$

$$\{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a^2 & -1 \\ a & a^3 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a^3 - a - 2a^3 + a^3 - 2 = a^3 + 2a^2 - a - 2 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini resultan las soluciones  $\underline{x_1=1}$  ;;  $\underline{x_2=-1}$  y  $x_3=-2$ .

$$\{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \\ a^2 & a^3 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a^4 - a^2 - 2a^4 + a^3 - 2a = a^3 + a^2 - 2a =$$

$$= a(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow \underline{a_1=0} ;; \underline{a_2=1} ;; \underline{a_3=-2}.$$

$$\text{Para } \alpha = 1 \text{ es } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A=1}.$$

$$\text{Para } \alpha = -2 \text{ es } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A=2}.$$

De lo anterior se concluye lo siguiente:

Para  $a = -2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

Para  $a \neq -2 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Resolvemos para  $\alpha = -2$ , que el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{El sistema resulta } \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \\ -2x+4y-8z=2 \end{cases}, \text{ equivalente a } \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \end{cases}.$$

$$\text{Haciendo } z = \lambda: \begin{cases} x+y=2-\lambda \\ x-2y=-1-4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-\lambda \\ -x+2y=1+4\lambda \end{cases} \Rightarrow 3y=3+3\lambda ;; \underline{y=1+\lambda} ;;$$

$$x+y=2-\lambda ;; x+1+\lambda=2-\lambda ;; \underline{x=1-2\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R$$

\*\*\*\*\*

2º) Considere la recta  $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$  y el plano  $\pi \equiv x - 2y - z = 4$ :

a) Calcule el ángulo que forman la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

b) Determine el plano  $\gamma$  que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ .

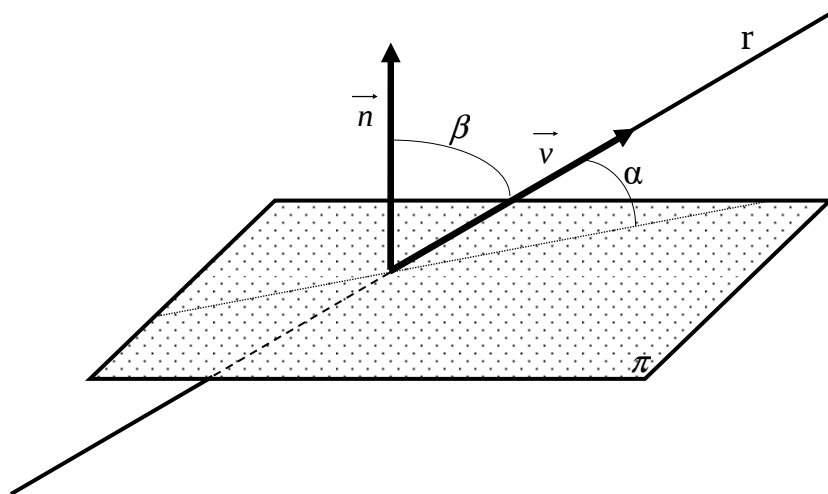
a)

El ángulo  $\alpha$  que forman el plano  $\pi$  y la recta  $r$  es el complementario del ángulo que forman un vector  $\vec{v}$  director de  $r$  y un vector  $\vec{n}$ , normal al plano  $\pi$ .

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



Un vector director de la recta  $r$  es  $\vec{v} = (2, -1, 1)$  y el vector normal del plano  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, -2, -1)$ .

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(2, -1, 1) \cdot (1, -2, -1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\beta = 60^\circ} \Rightarrow \underline{\alpha = 30^\circ}.$$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  forman un ángulo de  $30^\circ$ .

b)

El plano  $\gamma$  pedido, por contener a  $r$  tiene como vector director al vector director de

$r, \vec{v} = (2, -1, 1)$  y por ser perpendicular al plano  $\pi$  tiene como vector director al vector normal de  $\pi$ ,  $\vec{n} = (1, -2, -1)$ .

Un punto de la recta  $r$  es  $P(-1, 1, 2)$ .

La expresión general del plano  $\gamma$  es la siguiente:

$$\gamma(P; \vec{v}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad (x+1) + (y-1) - 4(z-2) + (z-2) + 2(x+1) + 2(y-1) = 0$$

$$3(x+1) + 3(y-1) - 3(z-2) = 0 \quad ;; \quad (x+1) + (y-1) - (z-2) = 0 \quad ;; \quad x+1+y-1-z+2=0.$$

$$\underline{\underline{\gamma \equiv x + y - z + 2 = 0}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Considere la función dada por  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ Lx - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ . Determine los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f(x)$  cumple las siguientes propiedades:

a)  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

b)  $f(x)$  tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 0$ .

-----

Por ser continua en  $\mathbb{R}$  tiene que cumplirse que los límites laterales para  $x = 1$  tienen que ser iguales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax + b) = \underline{2 + a + b} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (Lx - 1) = 0 - 1 = \underline{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a + b = -1 \;; \; \underline{a + b = -3}. \quad (*)$$

Por tener un extremo relativo para  $x = 0$  tiene que anularse su derivada para este valor:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = 4 \cdot 0 + a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}}.$$

Sustituyendo el valor de  $a$  en la expresión (\*):  $b = -3$ .

\*\*\*\*\*

4º) a ) Encuentre una primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ .

b ) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x)$  y el eje de abscisas entre  $x = 0$  y  $x = 9$ .

-----

a )

$$F(x) = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \sqrt{x} = t-1 \rightarrow dx = 2(t-1)dt \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = \int \frac{2(t-1)}{t} \cdot dt = 2 \int \frac{t-1}{t} \cdot dt =$$

$$= 2 \int \left( 1 - \frac{1}{t} \right) \cdot dt = 2[t - L|t|] + C = 2[(1+\sqrt{x}) - L|1+\sqrt{x}|] + C = 2 + 2\sqrt{x} - 2L(1+\sqrt{x}) =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2L(1+\sqrt{x}) + C = \underline{\underline{2[\sqrt{x} - L(1+\sqrt{x})] + C = F(x)}}.$$

b )

Por ser positivas todas las ordenadas de la función  $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ , el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \cdot [\sqrt{x} - L(1+\sqrt{x})]_0^9 = 2 \cdot \{[\sqrt{9} - L(1+\sqrt{9})] - [\sqrt{0} - L(1+\sqrt{0})]\} =$$

$$= 2 \cdot [(3 - L4) - 0] = \underline{\underline{2 \cdot (3 - L4) = S}}.$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se cumple que  $A^t \cdot A = I$ , donde I denota la matriz identidad y  $A^t$  es la traspuesta de A. Determine para qué valores de los

parámetros  $\alpha$  y b la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$  es ortogonal.

-----

$$A \cdot A^t = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & b \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + a^2 + b^2 & a^2 - a^2 & -ab - b \\ a^2 - a^2 & a^2 + a^2 & ab \\ -ab - b & ab & b^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 0 & -ab - b \\ 0 & 2a^2 & ab \\ -ab - b & ab & b^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}.$$

$$2a^2 = 1 ;; a^2 = \frac{1}{2} ;; a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}}} ;; \underline{\underline{a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}.$$

\*\*\*\*\*

2º) a ) Halle la ecuación implícita (o general) del plano  $\pi \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda-\mu \\ y=-3+\lambda \\ z=2+3\mu \end{cases}$ .

b ) Determine la ecuación de la recta  $r$  que es perpendicular al plano  $\pi$  y pasa por el punto  $P(-1, 2, 3)$ .

-----

a )

Dos vectores directores y un punto del plano  $\pi$  son  $\vec{u}=(2, 1, 0), \vec{v}=(-1, 0, 3)$  y  $P(1, -3, 2)$ .

La expresión general del plano  $\pi$  es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;; \; 3(x-1) + (z-2) - 6(y+3) = 0 \;;$$

$$3x - 3 + z - 2 - 6y - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 3x - 6y + z - 23 = 0}}.$$

b )

Un vector director de la recta  $r$  pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal de  $\pi$ , que es  $\vec{n}=(3, -6, 1)$ .

La recta  $r$  expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Dada la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$ , se pide:

- a ) Dominio de definición y corte con los ejes.
- b ) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- c ) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).
- d ) Representación gráfica aproximada.

-----

a )

Considerando que tiene que ser  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $|x| \geq 3$ ; el valor que anula el denominador ( $x = 1$ ) no es relevante con respecto al dominio de la función.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)}}$$

Por no estar definida la función para  $x = 0$ , la función  $f(x)$  no corta al eje Y.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 9} = 0 \;; \; x^2 - 9 = 0 \;; \; \underline{x_1 = -3} \;; \; \underline{x_2 = 3}.$$

La función  $f(x)$  corta el eje X en los puntos A(-3, 0) y B(3, 0).

b )

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando  $x$  tiende a valer infinito; son de la forma  $y = k$ .

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2}}}{\frac{x - 1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1 - 0}}{1 - 0} = \pm 1 \Rightarrow \underline{\underline{Asíntotas horizontales: y = 1 \text{ e } y = -1.}}$$

Verticales: son los valores de  $x$  que anulan el denominador.

No tiene asíntotas verticales por no estar definida la función para  $x = 1$ .

Oblicuas: No tiene.

Para que una función tenga asíntotas horizontales es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

c )

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} \cdot (x-1) - \sqrt{x^2-9} \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-9}} - \sqrt{x^2-9}}{(x-1)^2} = \frac{x^2-x-(\sqrt{x^2-9})^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-x-(x^2-9)}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-9}} = \frac{9-x}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-9}} = f'(x).$$

Por ser el denominador positivo  $\forall x \in D(f)$ , el signo del valor de la función es el que tenga el denominador, por lo cual:  $f'(x)=0 \Rightarrow 9-x=0 \Rightarrow x=9$

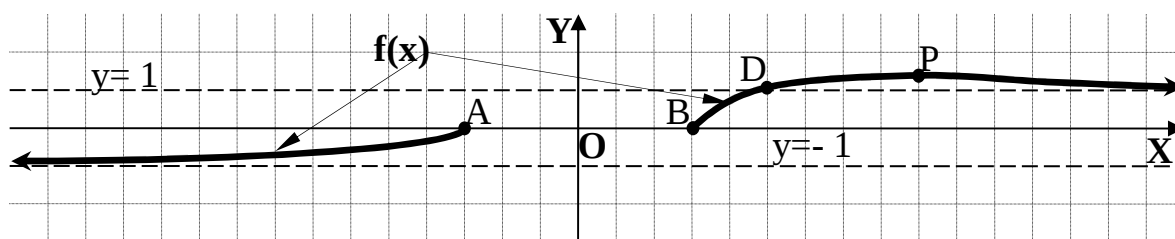
$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 9 \Rightarrow \underline{\text{Crecimiento: } (-\infty, -3) \cup (3, 9)}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow \underline{\text{Decrecimiento: } (9, +\infty)}$$

Teniendo en cuenta que  $f(x)$  es continua en su dominio y que la derivada se anula para  $x = 9$  y que para este valor pasa de ser creciente a decreciente, la función tiene un máximo relativo para  $x = 9$ .

$$f(9) = \frac{\sqrt{9^2-9}}{9-1} = \frac{\sqrt{81-9}}{8} = \frac{\sqrt{72}}{8} = \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2}}{8} = \frac{6\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo: } P\left(9, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}.$$

d ) Representación gráfica aproximada.



El punto de corte de la función con la asíntota  $y = 1$  es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-9} = x-1 \Rightarrow x^2-9 = x^2-2x+1 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$$

$$x=5 \Rightarrow f(5)=1 \Rightarrow \underline{D(5, 1)}.$$

\*\*\*\*\*

4º) a ) Encuentre una primitiva de la función  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ .

b ) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x)$  y el eje de abscisas entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

-----

a )

$$F(x) = \int \frac{x^2}{e^x} dx = \int x^2 \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = u \rightarrow 2x \cdot dx = du \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \cdot dx = \underline{-x^2 e^{-x} + 2I_1 = I} \quad (*)$$

$$I_1 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = u \rightarrow dx = du \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = \underline{-e^{-x}(x+1) + C = I_1}.$$

Sustituyendo en (\*) el valor obtenido para  $I_1$ :

$$F(x) = -x^2 e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x+1)] + C = \underline{\underline{-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C = F(x)}}$$

b )

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$  son positivas en  $R$ , el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{e^x} \cdot dx = [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)]_0^1 = [-e^{-1}(1 + 2 + 2)] - [-e^0(0 + 0 + 2)] =$$

$$= -\frac{5}{e} + 2 = \underline{\underline{\frac{2e-5}{e} = S}}.$$

\*\*\*\*\*